Sveriges lantbruksuniversitet | Tentamen HT17
Institutionen för energi och teknik | Matematisk statistik
Uwe Menzel | MS0065
http://www.matstat.de | 2017–10–17

OBS! Lösningar ska vara motiverade. Välj lämpliga beteckningar för sannolikheter och andra förekommande storheter.
Betygsgränser:

betyg	3	4	5
poäng	25	35	45

Uppgift 1 7 poäng

Nedanstående tabell anger sannolikhetsfunktionen för en diskret slumpvariabel X.
Det är dessutom känt att $p_X(3) = 2 \cdot p_X(2)$.

k	1	2	3	4
$p_X(k)$	0.3	?	?	0.1

a) Ange den fullständiga sannolikhetsfunktionen med hjälp av en tabell. (1P)

b) Ange också fördelningsfunktionen för X i form av en tabell. (1P)

c) Beräkna sannolikheten $P(X < 3)$ och $P(X \geq 2)$. (2P)

d) Beräkna väntevärdet för X. (1P)

e) Beräkna standardavvikelsen för X. (1P)

f) Beräkna väntevärdet för slumpvariabeln $Y = 2 \cdot X^2$. (1P)

Uppgift 2 6 poäng

Antalet gamma-partiklar som emitteras per sekund av en radioaktiv substans kan anses Poisson-fördelad med väntevärde 2.

a) Ange sannolikheten att det inte blir någon emission inom en sekund. (2P)

b) Ange sannolikheten att det inte blir någon emission inom 3 sekunder. (2P)

c) En detektor slutar fungera om det blir fler än 6 emissioner per sekund. Ange sannolikheten att detektorn slutar fungera. (2P)

Uppgift 3 6 poäng

Koncentrationen av kolmonoxid (CO) i luften av en storstad är ungefär exponentialfördelad med väntevärdet 4 ppm ("parts per million"). Kolmonoxid kan vara en hälsorisk om koncentrationen överstiger 10 ppm.

a) Ange sannolikheten att CO-koncentrationen blir hälsofarlig. (2P)

b) Genom olika åtgärder har man lyckats att sänka väntevärdet till 2 ppm. Ange sannolikheten att CO-koncentrationen blir hälsofarlig. (2P)

c) Stadens miljömål är att sänka (sannolikheten för) hälsorisken till 0.001. Till vilket värde måste väntevärdet förminskas för att nå detta mål? (2P)

Uppgift 4 6 poäng

En student vill mäta diametern på en vevaxel. Det är känt att mätinstrumentet gör ett mätfel som är normalfördelat med väntevärde 0 (inget systematiskt fel) och standardavvikelse 0.5 (enhet millimeter).

a) Ange sannolikheten att mätfelet blir större än 0.25 millimeter. (2P)

b) Studenten anser att sannolikheten som beräknades i del a) är för stor. Därför utfördes nu 25 mätningar och det aritmetiska medelvärdet $\bar{X}$ beräknades. Vad är sannolikheten att $\bar{X}$ blir större än 0.25 millimeter? (2P)

c) Låt $\bar{X}_n$ vara det aritmetiska medelvärdet av n mätningar. Låt $P(A)$ vara sannolikheten att $\bar{X}_n$ överskrider 0.25 millimeter. Hur stor måste n bli för att sänka $P(A)$ till 0.003? (2P)

Uppgift 5 6 poäng

I ett laboratorium vill man bestämma medelavkastningen (väntevärdet) för en biokemisk process. Följande avkastningar har mätts:

11.2 10.9 11.0 11.1 10.9 10.8 11.4 11.3 11.1

Beräkna ett 95 % konfidensintervall för väntevärdet. Avkastningarna kan anses som utfall av oberoende, normalfördelade slumpvariabler.
(stickprovsvärden: medelvärdet $\bar{x} = 11.1$; variansen $s^2 = 0.039$).

Uppgift 6 7 poäng

I ett laboratorium misstänker man att två mätinstrument uppvisar en systematisk skillnad när halten av polyklorerade bifenyler (PCB) mäts i industriavfall. Därför togs prov från 5 fabriker med olika kontaminationsnivåer:

fabrik	1	2	3	4	5
instrument A	2.25	5.55	1.95	12.4	20.40
instrument B	2.35	5.70	2.00	12.3	20.65

a) Beräkna ett 95% konfidensintervall för den antagna systematiska skillnaden mellan väntevärdena. Mätresultaten kan antas vara normalfördelade och oberoende. (6P)

b) Kan dessa mätningarna bekräfta misstankarna (med konfidensgrad 95%)? (1P)

Uppgift 7 6 poäng

En företagsledning vill granska om det finns skillnader i andelen av bristfälliga produkter mellan två fabriker. 100 produkter kontrollerades vid varje fabrik. I fabrik A blev det 11 felaktiga produkter, i fabrik B bara 8. Låt antalet defekta produkter vara slumpvariabler X respektive Y.

a) Vilken fördelning har slumpvariablerna X och Y ? (1P)

b) Ange ett 99% konfidensintervall för skillnaden mellan andelarna. (4P)

c) Kan man på grund av denna undersökning påstå att en av fabrikerna producerar med sämre kvalitet (med 99% konfidensgrad) ? (1P)

Uppgift 8 6 poäng

En leverantör av elektroniska komponenter påstår att responstiden på hans produkter är mindre än 20 millisekunder. En potentiell köpare vill förvärva ett större antal, men bara om responstiden verkligen är mindre än det angivna värdet. För att kontrollera detta utför köparen en gransking där responstiden av 10 komponenter mäts, med följande resultat:

18.1 18.3 18.5 18.2 18.2 18.0 18.1 18.3 18.4 18.1

Borde köparen göra affären? Responstiderna kan anses som normalfördelade, mätningarna är oberoende. Tips: utför ett ensidigt test på signifikansnivå 0.05 och med $H_0 : \mu = 20$ och $H_a : \mu < 20$.
(stickprovsvärden: medelvärdet $\bar{x} = 18.22$; variansen $s^2 = 0.024$).

Allmänt tips:

I sammanhang med konfidensintervall används beteckningen konfidensgrad ($1 - \alpha$; t.ex. 0.95).
I sammanhang med hypotestest används beteckningen signifikansnivå (α ; t.ex. 0.05).