

Grundläggande matematisk statistik

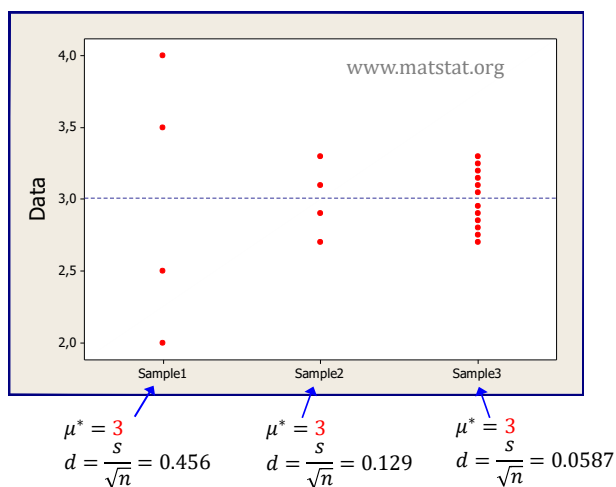
Intervallskattning

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

Punktskattningen räcker ofta inte



Alla tre stickprov ger samma punktskattning för medelvärdet ($\mu^* = 3$) men med varierande säkerhet (medelfelet för skattningen ligger mellan 0.46 och 0.059). En punktskattning tillhandahåller ingen information om sin precision och är därför ofta inte tillräckligt bra.

Konfidensintervall för en skattning

- Ett enda värde beskriver skattningen för en fördelningsparameter θ ofta inte tillräckligt bra.
- det är bättre att ange ett intervall vars bredd beskriver osäkerheten i skattningen.
- Ett så kallad **konfidensintervall** omfattar med en viss sannolikhet parametern som ska skattas.
- **Mer exakt:** Ett intervall I_θ som med sannolikheten $(1 - \alpha)$ täcker över den sökta fördelningsparametern θ kallas ett **konfidensintervall (KI)** för θ med **konfidensgraden** $(1 - \alpha)$.
- typiskt: $\alpha = 0.05 \rightarrow$ konfidensgrad 0.95 $\rightarrow$ "95% konfidensintervall"



Utgående från ett stickprov vill vi hitta ett intervall som med 95% sannolikhet omfattar det sanna värdet $\theta = 95\%$ konfidensintervall (KI)

www.matstat.org

Konfidensintervall för skattning av μ i en normalfördelning $N(\mu, \sigma)$

Stickprov: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ där $X_i \sim N(\mu, \sigma)$

$$\mu^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \quad \text{punktskattning för } \mu \text{ i } N(\mu, \sigma)$$

Kom ihåg att skattningen uppfattas som en slumpvariabel.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{fördelning för denna skattning}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \text{standardiserad}$$

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 1: σ känd

$$X_i \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Om σ är känd är detta en så kallad **referensvariabel** (pivotvariabel).
(OBS: en $N(0,1)$ - variabel betecknas ofta med Z)

Referensvariabel:

- är känd så nära som på parametern vi vill skatta [här: μ]
- dess fördelning är helt känd, inga okända parametrar ingår [här: $N(0,1)$]

Kom ihåg (föreläsning F5): Om Z är en $N(0,1)$ -fördelad slumpvariabel så gäller :

$$P(-\lambda_{\alpha/2} < Z \leq +\lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \quad \text{om } Z \sim N(0, 1)$$

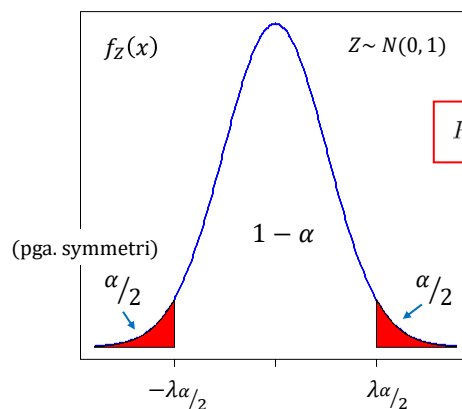
$\lambda_{\alpha/2}$ = kvantil för standardiserad normalfördelning, $N(0,1)$

www.matstat.org

Repetition

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ [eller ungefär så pga. Centrala Gränsvärdeessatsen, CGS]

$$\begin{aligned} P(-\lambda_{\alpha/2} < Z \leq +\lambda_{\alpha/2}) &= \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - \Phi(-\lambda_{\alpha/2}) = \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - [1 - \Phi(\lambda_{\alpha/2})] \\ &= 2 \cdot \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - 1 = 2 \cdot [1 - \alpha/2] - 1 = \underline{\underline{1 - \alpha}} \end{aligned}$$



$$P(-\lambda_{\alpha/2} < Z \leq +\lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$\lambda_{\alpha/2}$ = kvantil för standardiserad normalfördelning $N(0,1)$

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 1: σ känd

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ eller ungefär så (CGS)

Steg 1: För att hitta ett konfidensintervall (KI) stängs referensvariabeln in mellan kvantilerna för dess fördelning:

$$P(-\lambda_{\alpha/2} < Z \leq +\lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{N(0,1)\text{-fördelad}} \leq +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad \lambda_{\alpha/2} = \text{kvantil för } N(0,1)$$

$N(0,1)$ - fördelad

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 1: σ känd

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ eller ungefär så (CGS)

Steg 2: Argumentet för $P(\dots)$ omformas så länge tills vi har stängt in parametern vi vill skatta mellan kända storheter $\rightarrow P(\dots < \mu \leq \dots)$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad | \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

$$P\left(-\lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu \leq +\lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad | - \bar{X}$$

$$P\left(-\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu \leq -\bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad | \cdot (-1)$$

$$P\left(\bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu > \bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{vänd om}$$

$$P\left(\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 1: σ känd

$$P\left(\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Detta betyder: Slh:en att μ ligger mellan $\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ och $\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ är $1 - \alpha$. Det är precis vad vi ville ha! De numeriska värdena av dessa gränser är kända om standardavvikelsen σ är känd. Konfidensintervallet är alltså:

$$I_{\mu} = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{KI för } \mu \text{ i } N(\mu, \sigma) \text{ med konfidsensgrad } (1 - \alpha) \text{ när } \sigma \text{ är känd.}$$

Om t.ex. $\alpha = 0.05$ blir det alltså en KI med konfidsensgrad 0.95 (95% konfidensintervall):

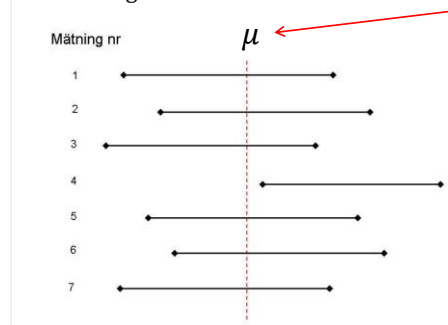
$$I_{\mu} = \bar{x} \pm \lambda_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

www.matstat.org

Tolkning av konfidensintervall

Låt $\alpha = 0.05$ $I_{\mu} = \bar{x} \pm \lambda_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 95% KI för μ

Slh.:en att dessa intervallgränser omfattar det sanna värdet μ är 95 %.



I "det långa loppet" (när många stickprov tas) omfattar 95 av 100 beräknade konfidensintervaller den sanna parametern.

www.matstat.org

Allmän metod för att härleda ett KI

1. Hitta en **referensvariabel**
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parantesen $P(\dots)$

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \text{referensvariabel om } \sigma \text{ är känd} \\
 2) \quad & P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad \text{gäller för en } N(0,1)\text{-variabel} \\
 3) \quad & P\left(\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{after omformning}
 \end{aligned}$$

Det sanna väntevärdet μ omfattas alltså med sannolikhet $1 - \alpha$ av:

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{KI för } \mu \text{ med konfidsgrad } 1 - \alpha$$

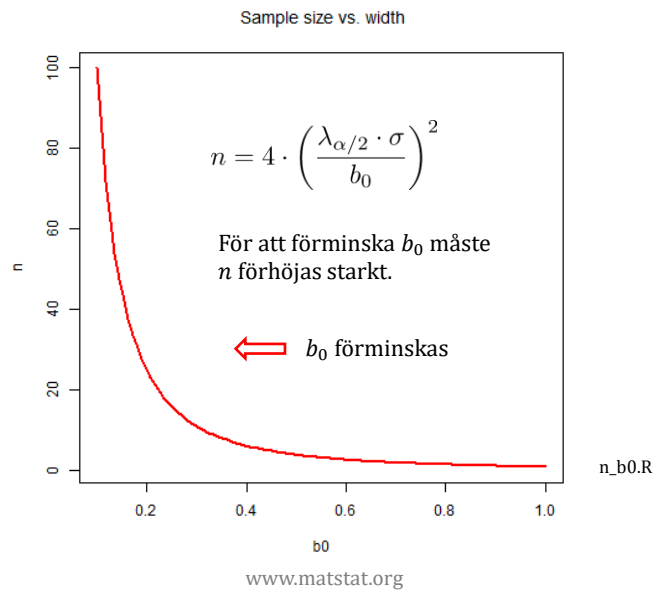
Konfidensintervallets bredd

$$\begin{aligned}
 & \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \boxed{I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \bar{x} \quad \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
 & \text{-----} \\
 & \boxed{b = 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{bredden av KI:et för } \mu \text{ i } N(\mu, \sigma) \text{ när } \sigma \text{ är känd; konfidsgrad } 1 - \alpha
 \end{aligned}$$

Blir n större, så förminskas bredden av konfidensintervallet. Detta är önskningsvärt (högre precision), men det blir troligtvis också dyrare (att samla in fler mätvärden). Vi kan kräva att KI:et inte ska vara bredare än ett visst värde b_0 , och därifrån bestämma hur stort stickprovet måste vara. Omformning av ovanstående formel (där vi slår fast $b = b_0$) ger:

$$\boxed{n = 4 \cdot \left(\frac{\lambda_{\alpha/2} \cdot \sigma}{b_0}\right)^2} \quad \begin{aligned} & \lambda_{\alpha/2} \text{ bestäms genom val av } \alpha \\ & \sigma \text{ känd enligt vart antagande} \\ & b_0 \text{ slås fast enligt önskan} \end{aligned}$$

Konfidensintervallets bredd



Sammanfattning

I samband med härledningen av ett konfidensintervall för μ hade vi:

- använt $\bar{X}$ som punktskattning för μ
- skrivit ner vilken fördelning $\bar{X}$ har
- hittat en referensvariabel
- stängt in referensvariabeln mellan respektive kvantiler
- omformat i parentesen $P(\dots)$ för att stänga in parametern som ska skattas mellan kända storheter

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +\lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X} + \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow I_{\mu} = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{KI för } \mu \text{ med konfidensgrad } 1 - \alpha, \text{ } \sigma \text{ antas vara känd}$$

Allmän metod för att härleda ett konfidsensintervall

1. Hitta en [referensvariabel](#)
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

OBS! Detta är redan det grundläggande som behövs för att härleda konfidsensintervaller. Det finns dock många olika situationer:

- σ kan vara okänd (och så är det också oftast)
- en annan fördelning än normalfördelning kan föreligga
-

Flera olika sådana situationer ska nu diskuteras →

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 2: σ okänd, stort stickprov

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ eller CGS

$$\mu^* = \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{fördelning för skattning för } \mu$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Detta är **inte** någon referensvariabel för att σ är okänt. (Vi vill skatta μ , alltså får bara μ vara den enda okända storheten i uttrycket). Om n är stor kan dock σ approximeras med s (s är ju en [konsistent skattning](#) för σ , dvs. s ligger med stor sannolikhet nära σ , se föreläsning **F8**, "Punktskattning"):

$$\sigma \rightarrow s \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \text{Referensvariabel} \quad n \geq 30$$

→ Allmän metod för att härleda ett konfidsensintervall :

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 2: σ okänd, stort stickprov

1. Hitta en **referensvariabel** $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ eller CGS
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parantesen $P(\dots)$

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

KI för μ i $N(\mu, \sigma)$ med konfidensgrad $(1 - \alpha)$ när σ är okänd men stickprovet (n) är stort.

$n \geq 30$

$I = \text{punktskattning} \pm \text{kvantil} \cdot \text{medelfel}$

Exempel: stickprovet: $n = 32$ $\bar{x} = 42250$ $s = 164$
sökes: 95% KI för μ

$$\alpha = 0.05 \rightarrow \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$$

$n = 31$ alltså $\sigma \rightarrow s$

$$I_\mu = 42250 \pm 1.96 \cdot \frac{614}{\sqrt{32}} = 42250 \pm 212 = (42030; 42470)$$

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 3: σ okänd, litet stickprov

$$\mu^* = \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{fördelning för skattning för } \mu$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Detta är **inte** någon referensvariabel för att σ är okänt. Stickprovet är inte heller stort så att σ kan inte ersättas med s . Istället förändras fördelningen.

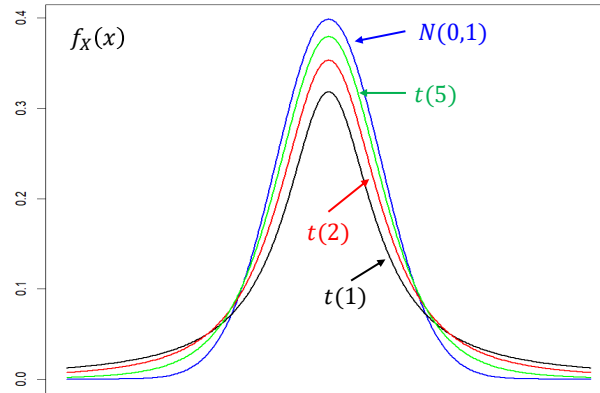
Om n är liten och vi ersätter $\sigma \rightarrow s$ ändras fördelningen till **Student's t-fördelning** (härlledning: se appendixet)

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{referensvariabel}$$

Argumentet för t -fördelningen (här: $n-1$) kallas "**frihetsgrader**". Student's t -fördelning liknar normalfördelningen men är något bredare, vilket återspeglar den större osäkerheten (vi har ju en sämre approximering av σ genom s om n är liten). Ju större n blir, desto smalare blir t -fördelningen (större stickprov "belönas" återigen med större precision vid skattningen).

Student's t -fördelning

Täthetsfunktion för t -fördelningen för olika frihetsgrader, jämförelse med $N(0,1)$



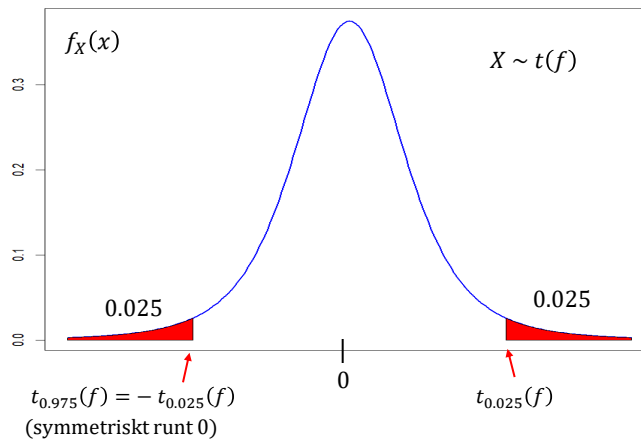
$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

täthetsfunktion
 ν = antalet frihetsgrader

www.matstat.org

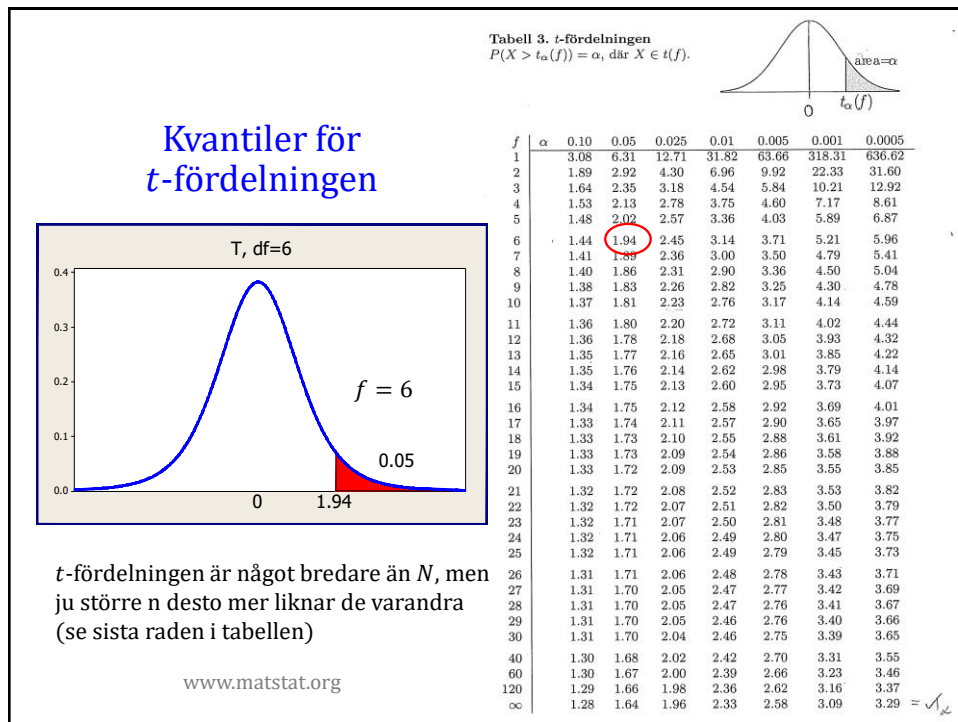
Kvantiler för t -fördelningen

Täthetsfunktion för Student's t



OBS!: Kvantilerna för t beror på antalet frihetsgrader (f)

www.matstat.org



KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 3: σ okänd, litet stickprov

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{referensvariabel} \quad X_i \sim N(\mu, \sigma)$$

1. Hitta en referensvariabel
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



$$I_{\mu} = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

KI för μ i $N(\mu, \sigma)$ med konfidsgrad $1 - \alpha$ när σ är okänd och stickprovet (n) är litet.

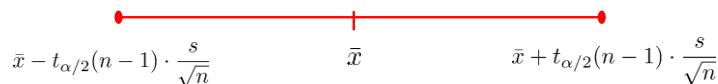
www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 3: σ okänd, litet stickprov

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$I = \text{punktskattning} \pm \text{kvantil} \cdot \text{medelfel}$



Vi får $\bar{x}, s, n$ från stickprovet och $t_{\alpha/2}(n-1)$ ur en tabell.

OBS!: Kom ihåg att $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ antogs för att härleda konfidensintervallet. Pga. den Centrala Gränsvärdessatsen kan det räcka om variablerna X_i är bara ungefär normalfördelade.

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

Fall 3: σ okänd, litet stickprov

Exempel:

Vi vet (eller har skäl att tro) att X är normalfördelad.

$\vec{x} = (15.7, 14.3, 12.65, 13.2, 16.85, 16.05, 16.55, 16.05, 16.6, 17.05)$

Sökes: 95% konfidensintervall för μ

Om det är känt att $\sigma = 1.56$:

$$D = \sigma / \sqrt{n} \approx 0.5 \quad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$$

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D = 15.5 \pm 1.96 \cdot 0.5 \approx 15.5 \pm 1 = (14.5, 16.5)$$

Om σ är okänd:

$$s = 1.56 \quad d = s / \sqrt{n} \approx 0.5 \quad t_{\alpha/2}(f) = t_{0.025}(9) = 2.26$$

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot d \approx 15.5 \pm 2.26 \cdot 0.5 \approx 15.5 \pm 1.1 = \underline{\underline{(14.4, 16.6)}}$$

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N-variabler

Fall 1: σ_X och σ_Y kända

Två populationer, 2 stickprov: $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n_x})$ } 2 populationer
 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_y})$ }

Punktskattning för skillnaden $\Delta\mu = \mu_X - \mu_Y$ mellan de två väntevärdena:

$$\Delta\mu^* = \bar{X} - \bar{Y} \quad (\text{väntevärdesriktig, konsistent})$$

$$\text{Vi vet att: } \bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_x}}\right) \text{ och } \bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y}{\sqrt{n_y}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right)$$

$$\Delta\mu = \mu_x - \mu_y \quad D = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

$$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\Delta\mu, D)$$

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N-variabler

Fall 1: σ_X och σ_Y kända

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\Delta\mu, D)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta\mu}{D} \sim N(0, 1) \quad \text{detta är en referensvariabel om } \sigma_X \text{ och } \sigma_Y \text{ är kända} \quad D = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

1. Hitta en **referensvariabel**
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot D$$

KI för $\Delta\mu$ mellan två normalfördelningar,
konfidsgrad $1 - \alpha$, om σ_X och σ_Y kända



OBS!: Om ett KI för en differens mellan två väntevärden **inte** omfattar nollpunkten, så vet man med $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ sannolikhet att väntevärdena i de två populationerna verkligen skiljer sig. Om KI:et däremot omfattar 0, så kan vi inte säga om en skillnad finns – noll är ju en möjlig skillnad i så fall!

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N -variabler

Fall 2: σ_X och σ_Y okända men stora stickprov

$n_x \geq 30$; $n_y \geq 30$ "tumregler", ibland även mindre

$\sigma_x \rightarrow s_x$ $\sigma_y \rightarrow s_y$ pga. konsistens av skattningen

$$D \rightarrow d \quad d = \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} \quad \text{medelfelet}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta\mu}{d} \sim N(0, 1) \quad \text{detta är en referensvariabel för att } s_x \text{ och } s_y \text{ är kända (och en bra approximation för } \sigma_x \text{ resp. } \sigma_y, \text{ så att fördelningen inte ändrar sig)}$$

1. Hitta en referensvariabel
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$$

KI för $\Delta\mu$ mellan två normalfördelningar, konfidsgrad $1 - \alpha$, σ_X och σ_Y okända men stora stickprov

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N -variabler

Fall 2: σ_X och σ_Y okända men stora stickprov

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$$

KI för $\Delta\mu$ mellan två normalfördelningar, konfidsgrad $1 - \alpha$, σ_X och σ_Y okända men stora stickprov

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \bar{x})^2 \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n_y} (y_i - \bar{y})^2$$

Ex1: populationer A och B; ett stickprov från varje population har tagits:

$$\begin{array}{llll} \bar{x}_A = 165.09 & s_A = 60.96 & n_A = 22 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{x}_A \\ \bar{x}_B \end{array}} \right\} \text{ givet} \quad \text{Söker: 99\% KI för skillnad mellan } \mu_A \text{ och } \mu_B \\ \bar{x}_B = 153.10 & s_B = 43.08 & n_B = 30 \end{array}$$

$$d = \sqrt{\frac{60.96^2}{22} + \frac{43.08^2}{30}} = 15.19 \quad \alpha = 0.01 \quad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.005} = 2.58$$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x}_A - \bar{x}_B \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d = 11.99 \pm 2.58 \cdot 15.19 = \underline{\underline{(-27; 51)}}$$

Resultat: ingen signifikant skillnad mellan väntevärdena på 99% konfidsnivå, konfidsintervallet innehåller ju nollan.

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N -variabler

Fall 2: σ_X och σ_Y okända men stora stickprov

Ex2: populationer A och B; ett stickprov från varje population har tagits:

$A = (195, 240, 154, 95, 65, 82, 132, 155, 125, 119, 155, 345, 145, 200, 130, 223, 145, 207, 183, 190, 137, 210)$

$B = (88, 73, 165, 188, 145, 158, 195, 165, 140, 145, 203, 196, 230, 225, 128, 190, 170, 158, 72, 135, 105, 155, 165, 120, 138, 125, 188, 145, 208, 75)$

99% konfidensintervall för skillnaden mellan medelvärden ?

$$\bar{x}_A = 165.09 \quad s_A = 60.96 \quad \bar{x}_B = 153.1 \quad s_B = 43.08 \quad \bar{x}_A - \bar{x}_B = 11.99$$

$$d = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{60.96^2}{22} + \frac{43.08^2}{30}} = 15.19 \quad (\text{medelfelet})$$

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \quad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.005} = 2.58$$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x}_A - \bar{x}_B \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d = 11.99 \pm 2.58 \cdot 15.19 = \underline{\underline{(-27, 51)}}$$

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N -variabler

Fall 3: σ_X och σ_Y okända men lika(!), små stickprov

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_X})$ där $X_i \sim N(\mu_x, \sigma)$ } två stickprov från
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_Y})$ där $Y_i \sim N(\mu_y, \sigma)$ } olika populationer

$$(\Delta\mu)^* = \bar{X} - \bar{Y} \quad \text{punktskattning för } \Delta\mu \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma$$

$$\sigma \text{ ersätts med } s_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1) \cdot s_x^2 + (n_y - 1) \cdot s_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)}} \quad \text{"pooled variance"}$$

$$\text{medelfelet: } d = s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}$$

$$\text{Man kan visa att } \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta\mu}{d} \sim t(n_x + n_y - 2) \quad \text{t-fördelning med } f = n_x + n_y - 2$$

(se appendix)

Stickproven är små $\rightarrow$ t-fördelning, som ovan, men med förändrat antal frihetsgrader

www.matstat.org

KI för skattning av $\Delta\mu$ för två N -variabler

Fall 3: σ_X och σ_Y okända men lika, små stickprov

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1) \cdot s_x^2 + (n_y - 1) \cdot s_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)}} \quad d = s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta\mu}{d} \sim t(f) \quad \text{referensvariabel}$$

$$f = n_x + n_y - 2 \quad \text{antalet frihetsgrader}$$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f) \cdot d$$

KI för $\Delta\mu$ för två normalfördelningar,
konfidensgrad $1 - \alpha$, σ_X och σ_Y okända men
lika, små stickprov

Jämförelse med stora stickprov ($n_{x,y} \geq 30$): $t_{\alpha/2}(f)$ är större än $z_{\alpha/2} \rightarrow$
konfidsensintervallet blir alltså bredare. Detta återspeglar faktumet att vi har
större osäkerhet på grund av mindre stickprov.

www.matstat.org

KI för skattning av differens mellan medelvärden för två **parade** stickprov från N

Skillnad mellan oberoende stickprov och stickprov i par:

- o parade stickprov: två respektive värden tillhör varandra, de bildar ett par och är **inte oberoende**

Exempel: Blodsockerhalt hos diabetespatienter före och efter en behandling:

Oberoende stickprov:

Grupp 1, före	70.4	80.1	65.8	66.7	74.3	72.1	70.9	85.4	89.3	90.4	78.9	77.0
Grupp 2, efter	70.9	65.8	66.7	74.3	87.2	89.3	93.4	82.1	74.1	70.9		

Parade (icke oberoende) stickprov:

person	A	B	C	D	E	F	G	H
före	78.1	66.9	74.3	72.5	90.9	78.3	68.4	72.5
efter	79.2	67.0	77.1	73.3	92.0	78.1	68.4	72.9

Blodsockerhalten hos en person *efter* behandlingen är **icke oberoende** av
blodsockerhalten hos denna person *före* behandlingen.

www.matstat.org

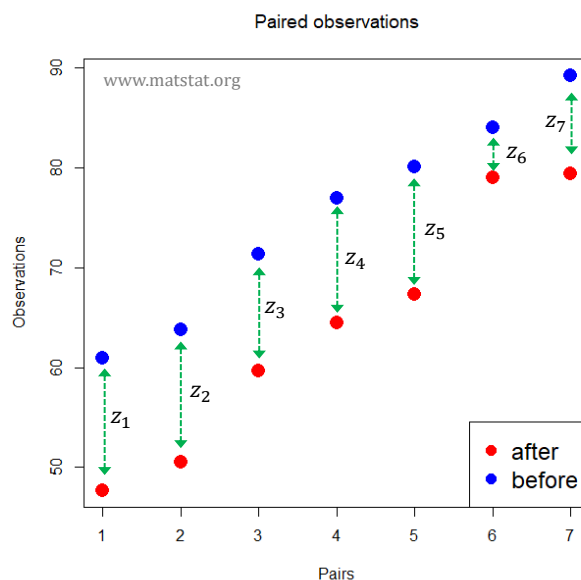
KI för skattning av differensen mellan medelvärden för två **parade** stickprov från N

person	A	B	C	D	E	F	G	H
före	78.1	66.9	74.3	72.5	90.9	78.3	68.4	72.5
efter	79.2	67.0	77.1	73.3	92.0	78.1	68.4	72.9

- Observationerna är inte oberoende, den ovan visade metoden för att beräkna ett KI för två oberoende grupper kan alltså inte användas.
- Genom att samla parade observationer kan variansen som ingår i beräkningen av ett KI förminskas jämfört med variansen för oberoende stickprov, för att varianserna inom ett par (vertikalt i tabellen) är oftast mindre än varianserna mellan paren (horisontalt i tabellen).
- Vi måste fortfarande kräva att paren är oberoende av varandra (t.ex. måste person A vara oberoende av person B, osv.)

www.matstat.org

Idè: använd differenserna z_i inom paren för att skatta $\Delta\mu$ mellan båda grupperna.



Modell för KI för parade stickprov, antaganden

- alla observationer kommer från en normalfördelning
- det finns en **systematisk förskjutning** $\Delta\mu$ mellan populationerna X och Y , som bara täcks över av rent slumpmässigt (normalfördelad) brus
- samma varians inom grupperna, dvs. vi har σ_x^2 i grupp X och σ_y^2 i grupp Y
- observationerna **mellan** paren måste vara oberoende

$$\left. \begin{aligned} X_i &\sim N(\mu_i, \sigma_x) \\ Y_i &\sim N(\mu_i + \Delta\mu, \sigma_y) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{systematisk förskjutning } \Delta\mu \\ \text{mellan båda grupper} \end{array}$$

$$Z_i = Y_i - X_i \quad \text{beräknas}$$

$$Z_i \sim N(\Delta\mu, \sigma_z) \quad \text{fördelning för alla } Z_i$$

Lite mer i appendixet!

$$\bar{Z} \sim N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{fördelning för medelvärdet av alla } Z_i$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \cdot \underbrace{\rho \cdot \sigma_x \sigma_y}_{C(X,Y)}} \quad \text{standardavvikelse för } \sigma_z \text{ (okänt)}$$

$$C(X, Y) = \rho \cdot \sigma_x \sigma_y \quad \text{kovarians för } X, Y$$

www.matstat.org

KI för $\Delta\mu$, parade stickprov

$$Z_i \sim N(\Delta\mu, \sigma_z) \quad \bar{Z} \sim N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right)$$

Detta problem känner vi redan till: skatta väntevärdet (här: $\Delta\mu$), för en normalfördelad slumpvariabel (här: Z_i), med okänd standardavvikelse (här: σ_z) med hjälp av ett litet stickprov!

Respektive referensvariabel är alltså t -fördelad, för att σ_z är okänt:

$$\frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{s_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{referensvariabel}$$

1. Hitta en **referensvariabel**
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{z} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{n}}$$

KI för väntevärdenas differens för parade stickprov från N , konfidensgrad $1 - \alpha$

$$z_i = y_i - x_i \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad s_z^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

www.matstat.org

KI för skattning av differens mellan medelvärden för två **parade** stickprov från N

Exempel: två personer A och B utförde mätningar på 11 olika objekt, vi vill veta om de mäter "systematiskt olika":

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	21.6	22.9	20	23.6	15.7	17.5	27.3	19.8	16.4	14.7	20.1
A	20.2	22	19.7	21.4	16.3	17	24.5	15.6	16	13.2	19
z	1.4	0.9	0.3	2.2	-0.6	0.5	2.8	4.2	0.4	1.5	1.1

Det antas att mätningarna är observationer från $N(\mu_i, \sigma_x)$ resp. $N(\mu_i + \Delta\mu, \sigma_y)$, där $\Delta\mu$ är den systematiska skillnaden mellan grupperna.

$$\bar{z} = 1.34 \quad f = n - 1 = 10 \quad t_{\alpha/2}(f) = t_{0.025}(10) = 2.23$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} = 1.33 \quad d = s/\sqrt{11} = 0.401$$

$$I_{\Delta} = (\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(f)d) = (1.34 \pm 2.23 \cdot 0.401) = (1.34 \pm 0.89) = \underline{\underline{(0.45, 2.23)}}$$

Fazit: Det finns verkligen en signifikant skillnad på 95% konfidensnivå (KI:et innehåller inte nollan).

www.matstat.org

KI för skattning av p i $Bin(n, p)$ (KI för skattning av en proportion)

- x = antalet "lyckade" Bernoulli-försök
 - n = totala antalet Bernoulli-försök
- } från stickprovet

$$p^* = \frac{X}{n} \quad \text{punktskattning för } p \quad X \sim Bin(n, p)$$

$$X \sim Bin(n, p)$$

$$X \sim N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right) \quad \text{om } V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) > 5$$

Normalapproximation! Stickprovet måste vara stort om detta ska vara befogat (som t.ex. i en opinionsundersökning). Kom ihåg exemplet med myntkast för att skatta p (föreläsning **F8**), där bara 10 kast inte gav något bra resultat! Vi använder reglerna som gäller för linjärtransformation för normalfördelade slumpvariabler (se föreläsning **F5**, "Kontinuerliga slumpvariabler") →

$$p^* = \frac{X}{n} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right) \quad \text{fördelning för punktskattning } p^* \text{ för } p$$

$$p^* = \frac{X}{n} \sim N(p, D) \quad \text{med } D = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \quad \text{förkortning}$$

KI för skattning av p i $Bin(n, p)$ (KI för skattning av en proportion)

$$p^* = \frac{X}{n} \sim N(p, D) \quad \text{med} \quad D = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \quad \text{förkortning}$$

$$\text{Standardisering ger:} \quad \frac{\frac{X}{n} - p}{D} \sim N(0, 1)$$

Standardavvikelsen D approximeras med medelfelet d genom att ersätta p med skattningen för p , alltså med $p^* = x/n$. Detta kan göras för att skattningen är väntevärdesriktigt och konsistent; och för att stickprovet (n) är stort:

$$p \rightarrow p^* = \frac{x}{n} \quad \Rightarrow \quad D \rightarrow d \quad d = \sqrt{\frac{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})}{n}}$$

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{d} \sim N(0, 1) \quad \text{referensvariabel}$$

1. Hitta en referensvariabel
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

www.matstat.org

KI för skattning av p i $Bin(n, p)$ (KI för skattning av en proportion)

$$\frac{\frac{X}{n} - p}{d} \sim N(0, 1) \quad \text{referensvariabel} \quad d = \sqrt{\frac{\frac{x}{n} \cdot (1 - \frac{x}{n})}{n}}$$

$$I_p = \frac{x}{n} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$$

KI för skattning av p i $Bin(n, p)$ (skattning av en proportion). Stort stickprov krävs.
Konfidsgrad $1 - \alpha$
Punktskattning $\mp$ kvantil $\cdot$ medelfel

Exempel: Andel undermåliga komponenter som produceras i ett företag: ett stickprov med 250 komponenter har tagits. Det visade sig att 42 av dem hade en för kort livslängd. Vi söker ett 95% KI för andelen felaktiga komponenter:

$$p^* = \frac{x}{n} = \frac{42}{250} = 0.168 \quad \text{punktskattning för andelen felaktiga komponenter}$$

$$d = \sqrt{\frac{0.168 \cdot (1 - 0.168)}{250}} = 0.023 \quad \alpha = 0.05 \quad \lambda_{\alpha/2} = \lambda_{0.025} = 1.96$$

$$I_p = \frac{x}{n} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d = 0.168 \pm 1.96 \cdot 0.023 = 0.168 \pm 0.046 = \underline{\underline{(0.12; 0.21)}}$$

www.matstat.org

KI för skattning av p i $Bin(n, p)$ (KI för skattning av en proportion)

$$I_p = \frac{x}{n} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d \quad \text{KI för skattning av proportion}$$

$$b = 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot d = 2 \cdot \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p^* \cdot (1 - p^*)}{n}} \quad \text{konfidensintervallets bredd}$$

Om man bestämmer sig för en viss maximal bredd b_0 av KI:et måste man välja stickprovsstorleken därefter. Omformning ger:

$$n_0 = 4 \cdot \left(\frac{\lambda_{\alpha/2}}{b_0} \right)^2 \cdot p^* (1 - p^*)$$

Vi känner dock inte p^* . Om vi inte har någon uppfattning om ungefär hur stort p^* kan vara måste vi "för säkerhets skull" ta det största värdet för $p^* \cdot (1 - p^*)$, som är $1/4$. (kolla med derivering). Vi får:

$$n_0 = \left(\frac{\lambda_{\alpha/2}}{b_0} \right)^2 \quad \text{eller} \quad b_0 = \frac{\lambda_{\alpha/2}}{\sqrt{n_0}}$$

Vill man förminska b_0 måste man förhöja stickprovsstorleken avsevärt: $n_0 \sim b_0^{-2}$
(Vill man halvera b_0 så måste man fyrdubbla n_0).

www.matstat.org

KI för skattning av skillnaden mellan 2 proportioner (skattning av Δp för två Bin)

- **Data:** 2 stickprov från 2 populationer: x_1, x_2 = resp. antalet "lyckade"
- opinionsundersökning (Ja/Nej) på staden (x_1) och på landet (x_2)
- andel felaktiga komponenter i fabrik A (x_1) och i fabrik B (x_2)

$$p_1^* = \frac{X_1}{n_1} \quad p_2^* = \frac{X_2}{n_2} \quad \text{punktskattningar för } p_1 \text{ och } p_2$$

$$(\Delta p)^* = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \quad \text{punktskattning för } \Delta p \text{ (väntevärdesriktig, konsistent)}$$

$$X_1 \sim Bin(n_1, p_1) \quad X_2 \sim Bin(n_2, p_2)$$

Både n_1 och n_2 måste vara stora $\rightarrow$ normalapproximation:

$$\frac{X_1}{n_1} \sim N \left(p_1, \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n_1}} \right) \quad \frac{X_2}{n_2} \sim N \left(p_2, \sqrt{\frac{p_2 \cdot (1 - p_2)}{n_2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \sim N \left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1 \cdot (1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1 - p_2)}{n_2}} \right)$$

www.matstat.org

KI för skattning av skillnaden mellan 2 proportioner (skattning av Δp för två Bin)

$$\Rightarrow \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \sim N \left(\underbrace{p_1 - p_2}_{\Delta p}, \underbrace{\sqrt{\frac{p_1 \cdot (1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2 \cdot (1-p_2)}{n_2}}}_D \right)$$

Standardavvikelsen D approximeras med medelfelet d genom att ersätta båda p_i med motsvarande skattning, alltså $p_i^* = \frac{x_i}{n_i}$ ($i = 1, 2$).

$$\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} \sim N(\Delta p, d) \quad d = \sqrt{\frac{\frac{x_1}{n_1} \cdot (1 - \frac{x_1}{n_1})}{n_1} + \frac{\frac{x_2}{n_2} \cdot (1 - \frac{x_2}{n_2})}{n_2}}$$

$$\frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2} - \Delta p}{d} \sim N(0, 1) \quad \text{referensvariabel} \rightarrow \text{"allmän metod"}$$

$$I_{\Delta p} = \frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot d$$

KI för skattning av skillnaden mellan två proportioner (Δp för två Bin).
Båda stickprov måste vara stora.
Konfidsensgrad ($1 - \alpha$).
Punktskattning $\pm$ kvantil $\cdot$ medelfel

www.matstat.org

KI för skattning av μ i $Po(\mu)$

Stickprov: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ = antalet inträffade händelser ("events") i n observerade (lika stora) intervaller

$$\mu^* = \bar{X} \quad \text{punktskattning (se tabell föreläsning F8)} \quad X_i \sim Po(\mu)$$

$$X_i \sim N(\mu, \sqrt{\mu}) \quad \text{normalapproximation (föreläsning F7)}$$

$\mu > 15$ (många händelser krävs i varje intervall)

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sqrt{\frac{\mu}{n}}\right) \quad \text{fördelning för medelvärde av } n \text{ observationer}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\mu/n}} \sim N(0, 1) \quad \text{referensvariabel} \quad (\text{om } \mu \text{ i nämnaren ersätts med sin skattning } \bar{x} \rightarrow \text{medelfel})$$

$$I_{\mu} = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

KI för väntevärde μ i Poissonfördelningen.
 $\mu > 15$ krävs. Konfidsensgrad $1 - \alpha$.
Punktskattning $\pm$ kvantil $\cdot$ medelfel.

www.matstat.org

KI för skattning av standardavvikelsen σ i $N(\mu, \sigma)$

Stickprov $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ oberoende

Om alla X_i har samma fördelning $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ och är oberoende, då gäller det **allmänt** att:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1) \quad \chi^2(n-1) : \text{chi-kvadrat-fördelning, för } n-1 \text{ frihetsgrader}$$

$$(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{eftersom} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Detta är redan en **referensvariabel** (bara σ okänt, som vi vill skatta).

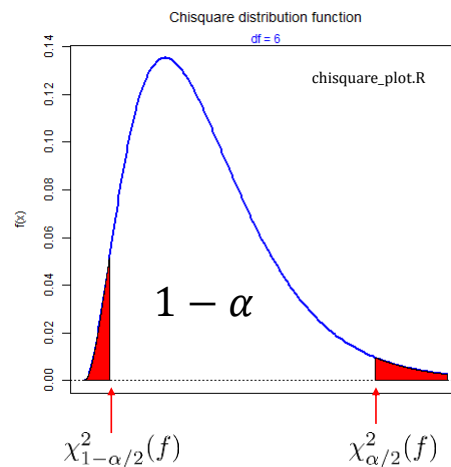
1. Hitta en **referensvariabel**
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parenteser $P(\dots)$

OBS!: Chi-kvadrat-fördelningen är icke symmetrisk!

www.matstat.org

KI för skattning av standardavvikelsen σ i $N(\mu, \sigma)$

OBS!: chi-kvadrat-fördelningen är icke symmetrisk:



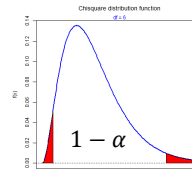
www.matstat.org

KI för skattning av standardavvikelsen σ i $N(\mu, \sigma)$

$$P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2(f) < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2(f)\right) = 1 - \alpha$$

omformning ...

$$P\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(f)}} < \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(f)}}\right) = 1 - \alpha \quad f = n - 1$$



$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{f \cdot s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(f)}; \frac{f \cdot s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(f)} \right)$$

KI för skattning av variansen σ^2 i en normalfördelning $N(\mu, \sigma)$

$$I_{\sigma} = \left(\sqrt{\frac{f}{\chi_{\alpha/2}^2(f)}} \cdot s; \sqrt{\frac{f}{\chi_{1-\alpha/2}^2(f)}} \cdot s \right)$$

KI för skattning av standardavvikelsen σ i en normalfördelning $N(\mu, \sigma)$

www.matstat.org

KI för skattning av standardavvikelsen σ i $N(\mu, \sigma)$

Exempel: stickprov $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $X_i \sim N(\mu, \sigma)$

$s = 1.56$; $n = 10$ från stickprovet

Söker: **95% KI för σ**

$$f = n - 1 = 9; \quad \alpha = 0.05$$

tabell

tabell

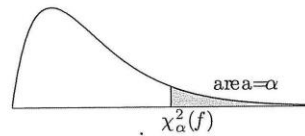
$$\chi_{1-\alpha/2}^2(f) = \chi_{0.975}^2(9) = 2.7 \quad \chi_{\alpha/2}^2(f) = \chi_{0.025}^2(9) = 19$$

$$I_{\sigma} = \left(\sqrt{\frac{9}{19}} \cdot 1.56; \sqrt{\frac{9}{2.7}} \cdot 1.56 \right) = \underline{\underline{(1.07; 2.85)}}$$

Standardavvikelsen omfattas med 95% sannolikhet av intervallet (1.07 ; 2.85).

www.matstat.org

Tabell 4. χ^2 -fördelningen
 $P(X > \chi^2_\alpha(f))$, där $X \in \chi^2(f)$.



Vi hittar:

$$\chi^2_{0.975}(9) = 2.7$$

$$\chi^2_{0.025}(9) = 19$$

$f \backslash \alpha$	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55	0.50	0.45	0.40	0.35	0.30	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1																	
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2																	
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7																	
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0																	
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1																	
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1																	
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0																	
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9																	
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7																	
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4																	
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1																	
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8																	
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5																	
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1																	
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7																	
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3																	
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9																	
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	44.4																	
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	46.0																	
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	47.5																	

www.matstat.org

Ensidigt KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

σ okänd, litet stickprov, begränsat till vänster

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(f)$$

referensvariabel $X_i \sim N(\mu, \sigma)$
 $f = n - 1$

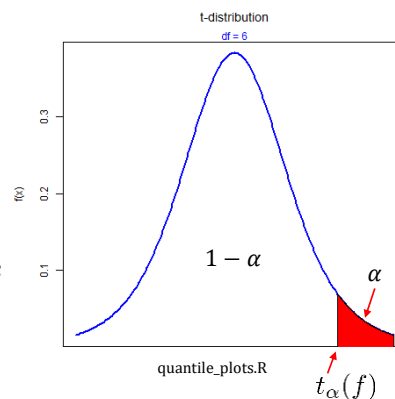
Det gäller att (se bild):

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_\alpha(f)\right) = 1 - \alpha$$

Efter omformning blir det:

$$P\left(\mu > \bar{X} - t_\alpha(f) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Sannolikheten att μ är större än detta uttryck är alltså $1 - \alpha$



www.matstat.org

Ensidigt KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

σ okänd, litet stickprov, begränsat till vänster

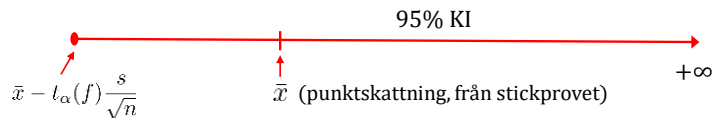
$$P\left(\mu > \bar{X} - t_{\alpha}(f) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Sannolikheten att μ är större än detta uttryck är alltså $1 - \alpha$

$$I_{\mu} = \left(\bar{x} - t_{\alpha}(f) \frac{s}{\sqrt{n}} ; +\infty \right)$$

Ensidigt KI för väntevärdet i $N(\mu, \sigma)$.
Konfidsensgrad $1 - \alpha$

Det betyder att vi vet med $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ sannolikhet att μ är större än den undre konfidsensgränsen.



www.matstat.org

Ensidigt KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

σ okänd, litet stickprov, begränsat till höger

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(f)$$

referensvariabel $X_i \sim N(\mu, \sigma)$
 $f = n - 1$

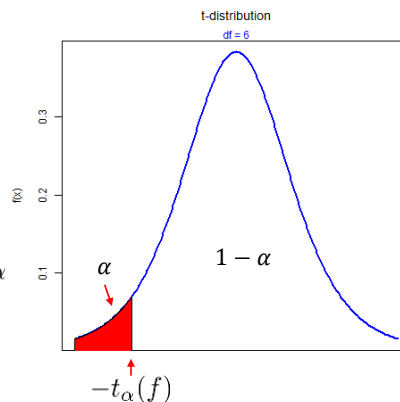
Det gäller att (se bild):

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} > -t_{\alpha}(f)\right) = 1 - \alpha$$

Efter omformning blir det:

$$P\left(\mu < \bar{X} + t_{\alpha}(f) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Sannolikheten att μ är mindre än detta uttryck är alltså $1 - \alpha$



www.matstat.org

Ensidigt KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$

σ okänd, litet stickprov, begränsat till höger

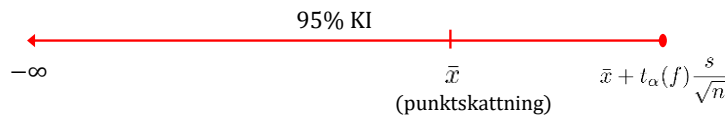
Ensidigt KI för skattning av μ i $N(\mu, \sigma)$
 σ okänd, litet stickprov, begränsat till höger

Sannolikheten att μ är mindre än
 detta uttryck är alltså $1 - \alpha$

$$I_\mu = \left(-\infty ; \bar{x} + t_\alpha(f) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Ensidigt KI för väntevärdet i $N(\mu, \sigma)$.
 Konfidsensgrad $1 - \alpha$

Det betyder att vi vet med $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ sannolikhet att μ är mindre än den övre konfidsensgränsen.



www.matstat.org

Appendix

Intervallskattning

Uwe Menzel, 2018

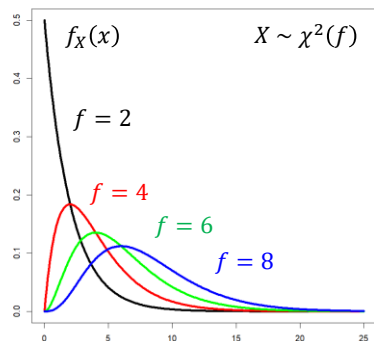
uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

Chi-kvadrat fördelningen

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Detta gäller allmänt om X_i är oberoende, normalfördelade slumpvariabler med standardavvikelsen σ .



Täthetsfunktion χ^2 för olika frihetsgrader.
Observationerna X_i måste härstamma från en normalfördelning.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma)$$

www.matstat.org



t-fördelningen

(Student's distribution)

Förutsättningar: $Z \sim N(0, 1)$ } måste vara oberoende
 $W \sim \chi^2(v)$ }

Om slumpvariablerna Z och W har ovanstående fördelningar, så har följande kvot en så-kallad **t-fördelning**:

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{v}}} \sim t(v)$$

t-fördelning med v frihetsgrader

www.matstat.org

Student's t -fördelning

- $Z \sim N(0,1)$ standardiserad normalfördelning
- $W \sim \chi^2(\nu)$ chi-kvadrat, $\nu = n - 1$ (frihetsgrader)
- Z och W oberoende

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad W = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{\nu}}} = \frac{\frac{(\bar{X} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2 \cdot (n-1)}}} = \frac{(\bar{X} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{S} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Den vänstra sidan är $t(n-1)$ - fördelad, alltså måste detta också gälla för den högra sidan:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{Slumpvariablerna } X_i \text{ måste vara normalfördelade och oberoende}$$

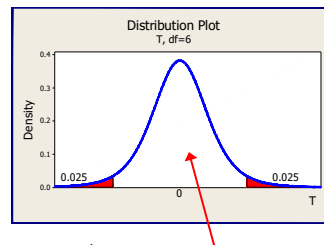
www.matstat.org

Skattning av μ för $N(\mu, \sigma)$ när σ är okänd och n inte heller stor

$$X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad \text{oberoende}$$

Referensvariabel:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq +t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(f) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2}(f) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(f) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad f = n - 1 \quad t_{\alpha/2}(f) > \lambda_{\alpha/2}$$

(bredare konfidensintervall när n liten och σ okänt)

www.matstat.org

Skattning av en differens mellan två medelvärden för N
när σ_x och σ_y är okända men lika ($= \sigma$)

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_x} + \frac{\sigma^2}{n_y}}} \sim N(0, 1) \quad \text{inte någon referensvariabel, för att } \sigma \text{ är okänd, } (\mu_x - \mu_y) \text{ ska skattas}$$

$$W = \frac{(n_x - 1) \cdot S_x^2 + (n_y - 1) \cdot S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_x + n_y - 2) \quad \text{krav: } \sigma_x = \sigma_y = \sigma; X_i \text{ måste vara oberoende och normalfördelade}$$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{n_x + n_y - 2}}} = \dots = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \sim t(n_x + n_y - 2) \quad \text{referensvariabel}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_x - 1) \cdot S_x^2 + (n_y - 1) \cdot S_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)} \quad \text{"pooled variance"}$$

www.matstat.org

Skattning av en differens mellan två medelvärden för N
när σ_x och σ_y är okända men lika ($= \sigma$)

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \sim t(f) \quad f = n_x + n_y - 2$$

$$P \left[-t_{\alpha/2}(f) \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \leq +t_{\alpha/2}(f) \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha/2}(f) \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \leq \mu_x - \mu_y \leq \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha/2}(f) \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \right] = 1 - \alpha$$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f) \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \quad (1 - \alpha) \cdot 100\% \text{ KI för skillnaden mellan de båda medelvärdena}$$

$$I_{\Delta\mu} = \text{punktskattning} + \text{kvantil} \cdot \text{medelfel}$$

www.matstat.org

KI för skattning av differens mellan medelvärden för två **parade** stickprov från N

$$\left. \begin{array}{l} X_i \sim N(\mu_i, \sigma_x) \\ Y_i \sim N(\mu_i + \Delta\mu, \sigma_y) \end{array} \right\} \text{Modell: systematisk skillnad } \Delta\mu \text{ mellan grupperna}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_i = Y_i - X_i \\ Z_i \sim N(\Delta\mu, \sigma_z) \end{array} \right\} \text{Differenser } Z_i \text{ och deras fördelning}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_x \sigma_y} \quad C(X, Y) = \rho \cdot \sigma_x \sigma_y \quad \text{Kovarians}$$

ρ = **korrelationskoefficient**. Denna är positiv, om X_i och Y_i har samma trend (alltså faller eller stiger gemensamt). Därför blir variansen för variablen Z mindre jämfört med oberoende grupper (där ρ skulle vara noll).

$$\bar{Z} \sim N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{Punktskattning, konsistent, väntevärdesriktig (medelvärdet av alla } Z_i \text{ är alltså en bra skattning för } \Delta\mu)$$

$$V(\bar{Z}) = \frac{1}{n} \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \cdot \rho \cdot \sigma_x \sigma_y) = \frac{\sigma_z^2}{n}$$

www.matstat.org

KI för skattning av differensen mellan medelvärden för två **parade** stickprov från N

$$\bar{Z} \sim N\left(\Delta\mu, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{\sigma_z/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \text{ingen referensvariabel, } \sigma_z \text{ okänt (vi kommer alltså till en } t\text{-fördelning ...)}$$

$$Z_i \sim N(\Delta\mu, \sigma_z) \text{ och } Z_i \text{ oberoende} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_z^2} \cdot \sum_i (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$W = (n-1) \cdot \frac{S_z^2}{\sigma_z^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \text{med} \quad S_z^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i (Z_i - \bar{Z})^2$$

$$\frac{\bar{Z}}{\sqrt{\frac{W}{n-1}}} = \dots = \frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{S_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{referensvariabel (samma härledning som för } t\text{-Test för små stickprov)}$$

www.matstat.org

KI för skattning av differensen mellan medelvärden för två **parade** stickprov från N

$$\frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{S_z/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad \text{referensvariabel}$$

1. Hitta en **referensvariabel**
2. Stäng in referensvariabeln mellan kvantilgränserna
3. Stäng in parametern som ska skattas mellan kända storheter genom att omforma i parentesen $P(\dots)$

$$P \left[-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\bar{Z} - \Delta\mu}{S_z/\sqrt{n}} \leq +t_{\alpha/2}(n-1) \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[\bar{Z} - t_{\alpha/2}(f) \cdot \frac{S_z}{\sqrt{n}} \leq \Delta\mu \leq \bar{Z} + t_{\alpha/2}(f) \cdot \frac{S_z}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$

$$I_{\Delta\mu} = \bar{z} \pm t_{\alpha/2}(f) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{n}} \quad f = n - 1 \quad \text{frihetsgrader}$$

www.matstat.org