

Grundläggande matematisk statistik

Kontinuerliga fördelningar

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

1

Begrepp "fördelning"

- Hur betar sig en variabel slumpmässigt ?
- En slumpvariabel (s.v.) har en viss fördelning, d.v.s. en viss sannolikhetsfunktion/täthetsfunktion och fördelningsfunktion.
- Dessa funktioner kännetecknar slumpprocessen entydigt.

Kom ihåg (föreläsning **F2**):

Om X är en kontinuerlig slumpvariabel,

- vi kan **inte** beräkna sannolikheten att X antar ett enskilt värde, t.ex. ~~$P(X = 5.25)$~~
- vi kan bara beräkna sannolikheten att X ligger i något intervall, t. ex. $P(3 < X \leq 5.25)$

www.matstat.org

2

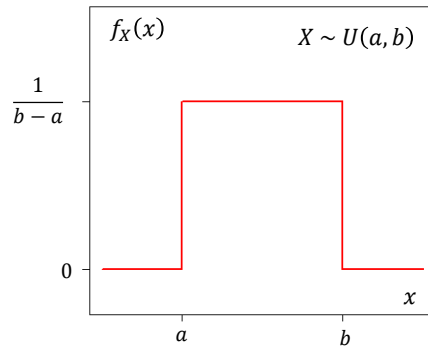
Kontinuerlig likformig fördelning

Kodbeteckning: $X \sim U(a, b)$ "uniform"

Utfallsrum: $\Omega_X = (a, b)$

Täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



3

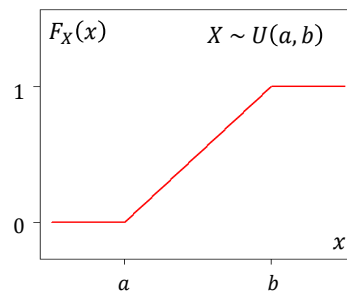
Kontinuerlig likformig fördelning

Fördelningsfunktion:

- $F_X(x)$ måste vara noll för alla x vänster om a
- $F_X(x)$ måste vara ett för alla x höger om b
- För $a \leq x \leq b$ gäller:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_a^x f_X(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{1}{b-a} \cdot t \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



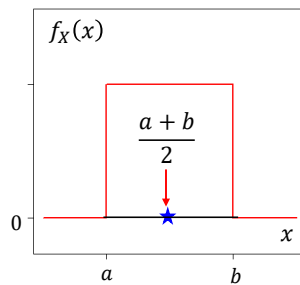
www.matstat.org

4

Kontinuerlig likformig fördelning

Väntevärde, beräkning:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b-a) \cdot (b+a) = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}} \end{aligned}$$



$$\frac{a+b}{2} = \text{"tyngdpunkt"}$$

www.matstat.org

5

Kontinuerlig likformig fördelning

Väntevärde, varians, standardavvikelse:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{"tyngdpunkt"}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \begin{array}{l} \text{ju större avstånd mellan } a \text{ och } b, \\ \text{desto större är variansen} \end{array}$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{|b-a|}{\sqrt{12}}$$

Exempel på kontinuerlig likformig fördelning:

Bussen från Arlanda till Uppsala går var 30:e minut. Jag vet inte när jag kommer ut ur planet → väntetiden på bussen ligger någonstans mellan 0 och 30 minuter → väntetiden är fördelad $X \sim U(0, 30)$

www.matstat.org

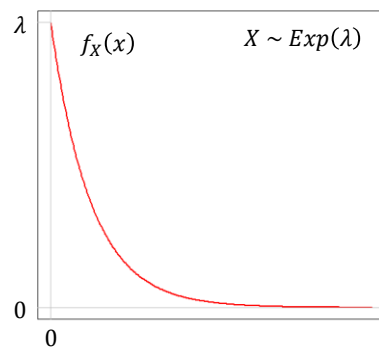
6

Exponentialfördelningen

Kodbeteckning: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Utfallsrum: $\Omega_X = (0, \infty)$

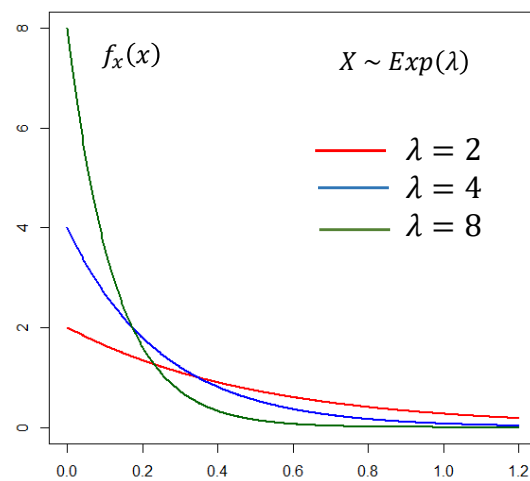
Täthetsfunktion: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$



7

Exponentialfördelningen

Täthetsfunktion



www.matstat.org

8

Exponentialfördelningen

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Normering:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot [e^{-\lambda \cdot x}]_0^{+\infty} = [e^{-\lambda \cdot x}]_{\infty}^0 = \underline{\underline{1}} \quad \checkmark$$

Fördelningsfunktion:

$$F_X(x) = 0 \quad \text{för } x < 0$$

För $x \geq 0$ gäller:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = \lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot [e^{-\lambda \cdot t}]_0^x = [e^{-\lambda \cdot t}]_x^0 = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda \cdot x}}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$

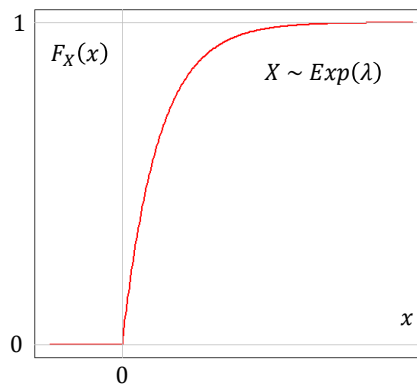
www.matstat.org

9

Exponentialfördelningen

Fördelningsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$



10

Exponentialfördelningen

Väntevärde, beräkning:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{-\lambda \cdot x}}_{v'} dx && \text{partiell integration} \\
 &= \lambda \cdot \left[\underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}_v \right]_0^{+\infty} - \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}}_v dx = 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}
 \end{aligned}$$

Anmärkning:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-\lambda \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}} = 0 \quad \text{L' Hospital}$$

www.matstat.org

11

Exponentialfördelningen

Väntevärde, varians, standardavvikelse:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

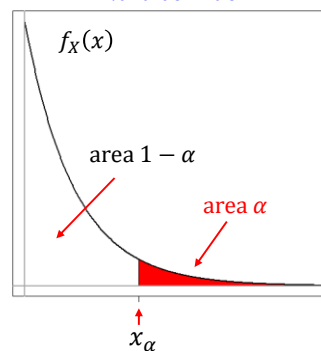
Kvantil: x_α

Kom ihåg definitionen för x_α :

$$\begin{aligned}
 F_X(x_\alpha) &= 1 - \alpha \\
 \Rightarrow 1 - e^{-\lambda \cdot x_\alpha} &= 1 - \alpha \\
 e^{-\lambda \cdot x_\alpha} &= \alpha \\
 -\lambda \cdot x_\alpha &= \ln(\alpha)
 \end{aligned}$$

$$x_\alpha = \frac{-\ln(\alpha)}{\lambda}$$

Kvantildefinition:



12

Exponentialfördelningen

Väntevärde, varians, standardavvikelse:

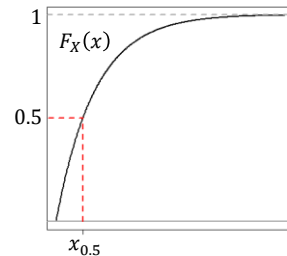
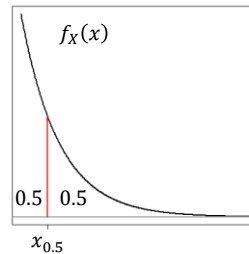
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Median = kvantil för $\alpha = 0.5$ alltså $x_{0.5}$

$$x_\alpha = \frac{-\ln(\alpha)}{\lambda}$$

$$x_{0.5} = \frac{-1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x_{0.5} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$



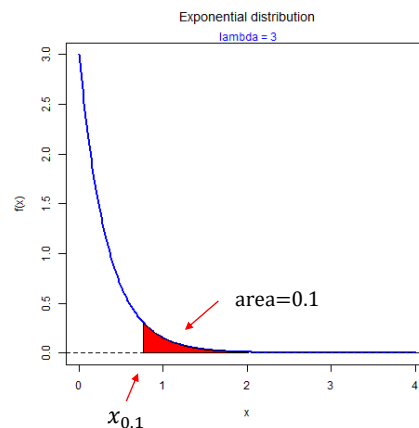
www.matstat.org

13

Exponentialfördelningen

Exempel: En slumpvariabel är exponentiellt fördelad med väntevärde 1/3. Beräkna 0.1-kvantilen. Skissa resultatet.

$$\begin{aligned} F_X(x_\alpha) &= 1 - \alpha \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x_\alpha} &= 1 - \alpha \\ e^{-\lambda \cdot x_\alpha} &= \alpha \\ -\lambda \cdot x_\alpha &= \ln \alpha \\ x_\alpha &= \frac{-\ln \alpha}{\lambda} \quad \text{med } \lambda = 3 \\ x_{0.1} &= \frac{-\ln 0.1}{3} = \underline{\underline{0.7675}} \end{aligned}$$



 `P = qexp(0.1, rate = 3, lower.tail = FALSE)`

14

Exponentialfördelningen

Exempel: En elektronisk komponent har en livstid som kan anses vara exponentiellt fördelad med väntevärde 2500 timmar. Vad är sannolikheten att denna komponent fungerar längre än 4000 timmar ?

$$\text{Slumpvariabel } X: \text{livstid} \quad E(X) = 2500 \implies \lambda = \frac{1}{2500}$$

$$\begin{aligned} P(X > 4000) &= 1 - P(X \leq 4000) = 1 - F_X(4000) \\ &= 1 - \left[1 - e^{-\frac{4000}{2500}}\right] = e^{-\frac{4000}{2500}} \approx \underline{\underline{0.2}} \end{aligned}$$

Vad är sannolikheten att denna komponent fungerar mellan 2000 och 4000 timmar ?

$$\begin{aligned} P(2000 < X \leq 4000) &= F_X(4000) - F_X(2000) = 1 - e^{-\frac{4000}{2500}} - \left[1 - e^{-\frac{2000}{2500}}\right] \\ &= e^{-\frac{2000}{2500}} - e^{-\frac{4000}{2500}} \approx \underline{\underline{0.247}} \end{aligned}$$



$$P = \text{pexp}(4000, \text{rate} = 1/2500) - \text{pexp}(2000, \text{rate} = 1/2500) \approx \underline{\underline{0.247}}$$

www.matstat.org

15

Exponentialfördelningen

Ex: En slumpvariabel X är exponentiellt fördelad med väntevärdet $1/4$

$$\text{a) } P(X \leq 0.5) \text{ ? } P(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-4 \cdot 0.5} = 1 - e^{-2} = \underline{\underline{0.865}}$$

$$\text{b) } P(0.2 \leq X \leq 0.4) \text{ ?}$$

$$\begin{aligned} P(0.2 \leq X \leq 0.4) &= P(0.2 < X \leq 0.4) = F_X(0.4) - F_X(0.2) \\ &= 1 - e^{-4 \cdot 0.4} - (1 - e^{-4 \cdot 0.2}) = 1 - e^{-1.6} - 1 + e^{-0.8} \\ &= e^{-0.8} - e^{-1.6} \approx \underline{\underline{0.247}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } E(X) \text{ ? } E(X) = \frac{1}{\lambda} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \quad \text{d) } V(X) \text{ ? } V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

www.matstat.org

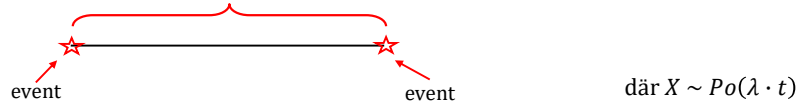
16

Exponentialfördelningen

Sammanhang med Poisson-fördelningen:

Vi antar att s.v. X är Poisson-fördelad: $X \sim Po(\lambda \cdot t)$ dvs. händelserna sker helt oberoende i tid eller rum. Avståndet mellan två händelser kallas **väntetid** ("inter-arrival time") och betecknas ofta med T . Eftersom händelserna sker slump- mässigt, är även T en slumpvariabel. Fördelningen av denna s.v. kan anges:

T = "inter-arrival time" = väntetid till nästa händelse



$$P(T > t) = P[\text{inga händelser i intervallet } (0, t)] = P(X = 0) = p_X(0)$$

$$P(T > t) = \frac{(\lambda \cdot t)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{Detta är fördelnings-funktionen för } Exp(\lambda) !$$

$$\Rightarrow T \sim Exp(\lambda)$$

Väntetiden för Poisson-processen är exponentiellt fördelad.

17

Normalfördelningen

- den **viktigaste fördelningen**, förekommer mycket ofta
- "bell curve" (klocka)
- centrala gränsvärdessatsen → många storheter är (ungefär) normalfördelade
- Exempel: olika mätfel, antalet vita blodkroppar per ml osv.

Kodbeteckning: $X \sim N(\mu, \sigma)$ **OBS!:** ibland $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Utfallsrum: $\Omega_X = (-\infty, \infty)$

Täthetsfunktion: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$

Två parametrar:

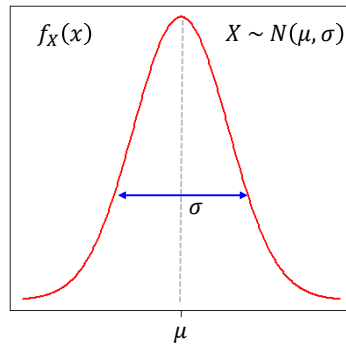
- μ : **väntevärde** ; symmetricentrum
- σ : **standardavvikelse** ; karakteriserar bredden av $f_X(x)$

www.matstat.org

18

Normalfördelningen

Täthetsfunktion: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$

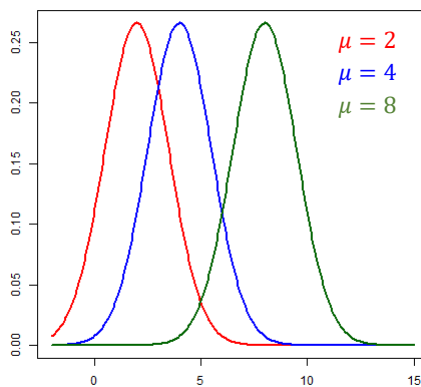


Normering: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ (beräkning: se t. ex. Blom s. 62)

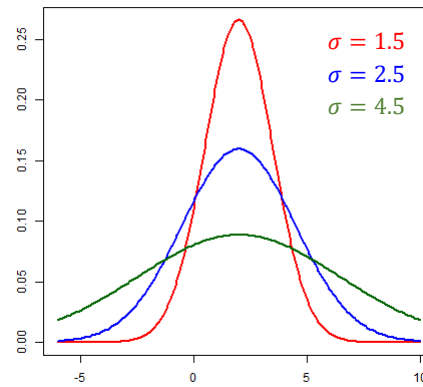
19

Normalfördelningen

Olika μ (väntevärden)



Olika σ (standardavvikelser)



www.matstat.org

20

Normalfördelningen

Väntevärde, varians, standardavvikelse:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \dots = \mu$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \dots = \sigma^2$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

Härledning:

se t. ex Blom s. 146 och 148

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

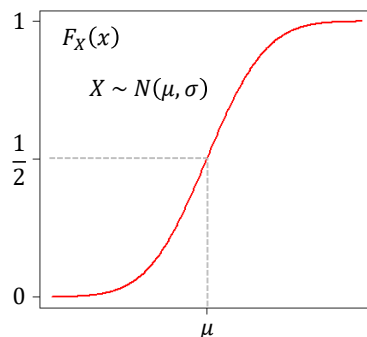
$$D(X) = \sigma$$

www.matstat.org

21

Normalfördelningen

Fördelningsfunktion: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$



- finns inget analytiskt uttryck
- inte heller tabellerad (tabellerad bara för $N(0,1)$)

Fördelningsfunktion för $N(0,1)$: specialfall $\mu = 0$; $\sigma = 1$ "standard normalfördelad"

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

- kallas $\Phi(x)$
- tabellerad för (tillräckligt) många x

22

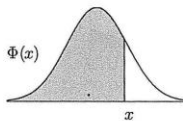
Fördelningsfunktion för $N(0,1)$: $\Phi(x)$

$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$

Blom s. 397

Tabell 1. Standard normalfördelning

 $\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \in N(0,1)$.För negativa x , utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ 

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

tabellerad
från 0 .. 4.0
i 0.01-steg

23

Normalfördelningen

Tabellen över fördelningsfunktionen finns bara för $N(0,1)$. Vilken nytta ska denna speciella tabell ha?

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

allmän fördelningsfunktion (alla μ och σ)

Substitution: $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$ (OBS! z är faktiskt den standardiserade slumpvariabeln!)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow dt = \sigma \cdot dz$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\text{tätetsfunktion för } N(0,1)} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(Red circle around F_X for $N(0,1)$!!)

tätetsfunktion för $N(0,1)$

www.matstat.org

24

Normalfördelningen

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Fördelningsfunktionen för den allmänna normalfördelningen kan beräknas med hjälp av fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen.

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$, så är $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, där Φ är fördelningsfunktionen för den standardiserade normalfördelningen, $N(0, 1)$.

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$X \sim N(\mu, \sigma)$

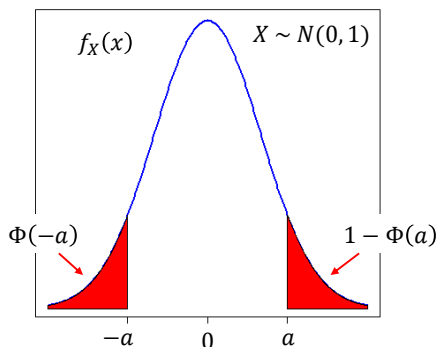
Med hjälp av denna formel och en tabell över Φ kan man beräkna fördelningsfunktionen för **alla värden av x , μ och σ** (med en viss precision).

25

Normalfördelningen

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Tabellerna över Φ finns dock mest bara för positiva argument. Med hjälp av symmetrin av $N(0,1)$ lyckas dock också beräkningen för negativa argument. Man utnyttjar att $N(0,1)$ är symmetrisk kring noll:



De rödmarkerade områdena har samma storlek (pga. symmetrin). Därmed följer:

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

Beräkning av Φ för negativa argument är möjligt med denna formel.

www.matstat.org

26

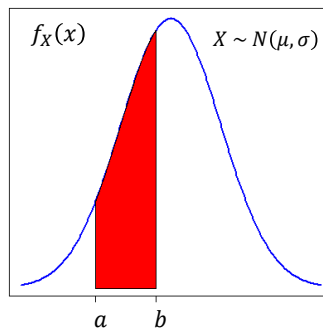
Normalfördelningen

Sannolikheten att en normalfördelad slumpvariabel hamnar mellan de reella talen a och b :

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

gäller allmänt

gäller bara för normalfördelningen



27

Normalfördelningen

Exempel: beräkning av F_X för godtyckliga μ och σ

a) $X \sim N(\mu, \sigma)$ $X \sim N(3, 2)$ söker: $P(X \leq 1)$?

tabell

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \underline{\underline{0.1587}}$$

b) $X \sim N(\mu, \sigma)$ $X \sim N(2, 1)$ söker: $P(1 \leq X \leq 3)$?

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= F_X(3) - F_X(1) = \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = \underline{\underline{0.683}} \end{aligned}$$

Del b) frågade efter sannolikheten att X ligger mellan $\mu - \sigma$ och $\mu + \sigma$.
Denna sannolikhet är alltså $\approx 68\%$. Se nästa sida $\rightarrow$

www.matstat.org

28

Normalfördelningen

Sannolikheten att X ligger mellan $\mu - \sigma$ och $\mu + \sigma$

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &= F_X(\mu + \sigma) - F_X(\mu - \sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \dots \approx \underline{\underline{68\%}} \end{aligned}$$

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$, så är sannolikheten att X ligger mellan $\mu - \sigma$ och $\mu + \sigma$ ungefär 68%.

Med samma metod får man:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$$

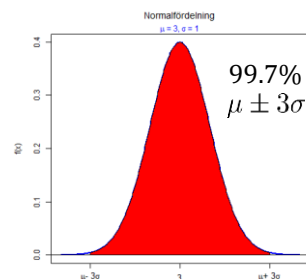
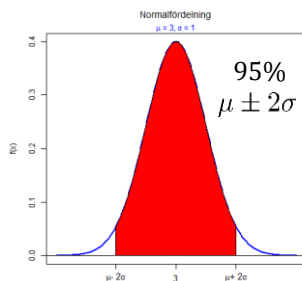
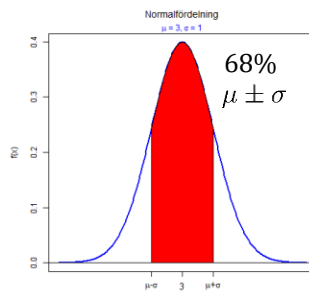
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$$

www.matstat.org

29

Normalfördelningen

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &\approx 68\% \\ P(\mu - 2 \cdot \sigma < X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) &\approx 95\% \\ P(\mu - 3 \cdot \sigma < X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) &\approx 99.7\% \end{aligned}$$



30

Normalfördelningen

Exempel: En s.v. X är normalfördelad med väntevärde 3 och variansen 4.

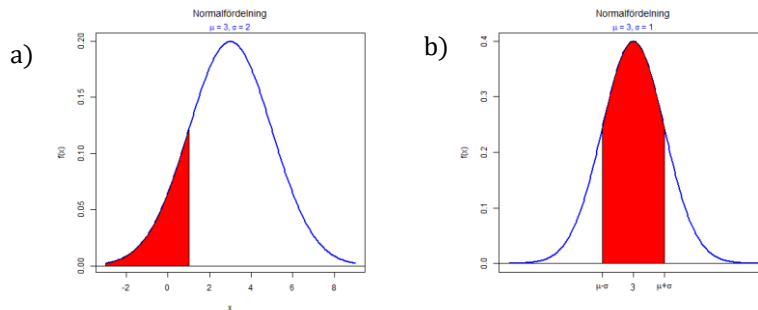
a) Ange sannolikheten att denna s.v. blir mindre än 1. Skissa resultatet

$X \sim N(3, 2)$ **OBS!:** 2:a parameter är standardavvikelsen!

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \underline{\underline{0.1587}}$$

b) Ange sannolikheten att denna s.v. ligger mellan 1 och 5. Skissa resultatet.

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = P(1 < X \leq 5) \approx 68\%$$



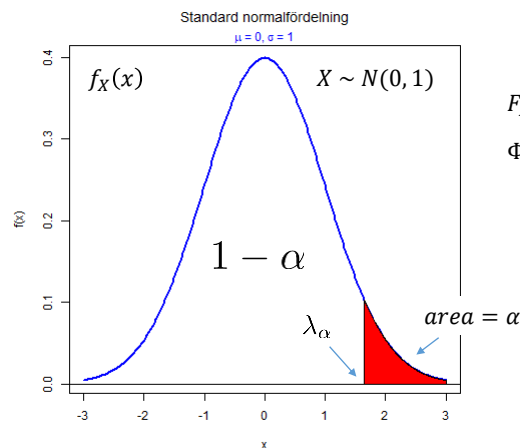
31

Normalfördelningen

Kvantiler för den standardiserade normalfördelningen, $N(0, 1)$

Kom ihåg definitionen för kvantiler x_α : $F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$

Kvantilerna för $N(0, 1)$ kallas ofta λ_α



$$F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha \text{ generellt}$$

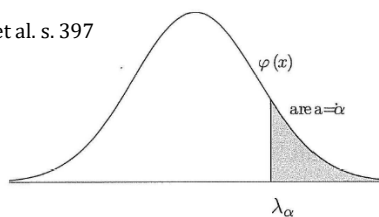
$$\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha \text{ för } N(0, 1)$$

32

Normalfördelningen

Kvantilerna för $N(0, 1)$ är tabellerade:

se Blom et al. s. 397



Figur: Kvantiler för $N(0, 1)$

α	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
λ_α	3.29	3.09	2.58	2.33	1.96	1.64	1.28

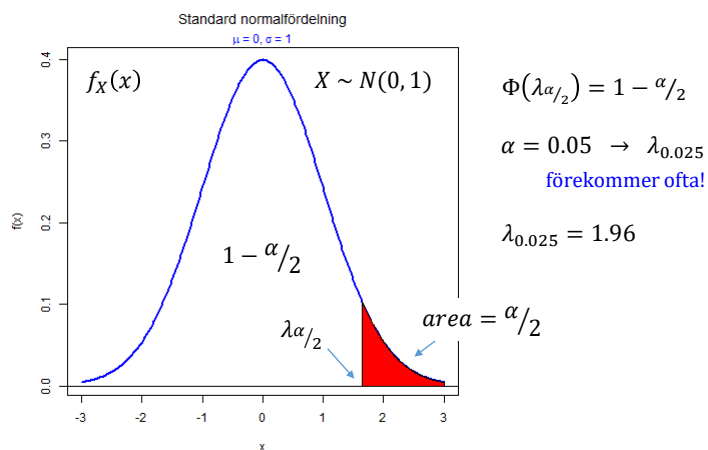
www.matstat.org

33

Normalfördelningen

Kvantiler för den standardiserade normalfördelningen, $N(0, 1)$

Ofta behövs också $\alpha/2$ som argument, dvs. vi ersätter α med $\alpha/2$:

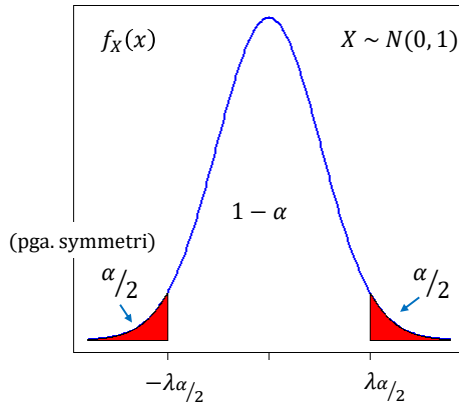


34

Normalfördelningen

Sannolikhet att en $N(0, 1)$ -slumpvariabel ligger mellan $-\lambda_{\alpha/2}$ och $+\lambda_{\alpha/2}$:

$$\begin{aligned} P(-\lambda_{\alpha/2} < X \leq \lambda_{\alpha/2}) &= \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - \Phi(-\lambda_{\alpha/2}) = \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - [1 - \Phi(\lambda_{\alpha/2})] \\ &= 2 \cdot \Phi(\lambda_{\alpha/2}) - 1 = 2 \cdot \left[1 - \frac{\alpha}{2}\right] - 1 = \underline{\underline{1 - \alpha}} \end{aligned}$$



$$P(-\lambda_{\alpha/2} < X \leq \lambda_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Detta viktiga resultat behövs senare för intervallskattning!

www.matstat.org

35

Linjärtransformation av normalfördelade s.v.

$$Y = a \cdot X + b \quad \text{linjärtransformation}$$

Repetition linjärtransformation (föreläsning F3):

$$\left. \begin{aligned} E(a \cdot X + b) &= a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu + b \\ V(a \cdot X + b) &= a^2 \cdot V(X) = a^2 \cdot \sigma^2 \\ D(a \cdot X + b) &= |a| \cdot D(X) = |a| \cdot \sigma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mu &= E(X) \\ \sigma^2 &= V(X) \\ \sigma &= D(X) \end{aligned}$$

Allmänt gäller det att $E(Y) = a \cdot \mu + b$ och $D(Y) = |a| \cdot \sigma$. Detta säger dock ingenting om fördelningen för Y . Normalfördelningen är speciell: **Om X är normalfördelad, så är även den linjär transformerade variabeln Y normalfördelad:**

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$
och $Y = a \cdot X + b$ där $a, b \in \mathcal{R}$
gäller det att $Y \sim N(a \cdot \mu + b, |a| \cdot \sigma)$

www.matstat.org

36

Summa och differens av slumpvariabler

Väntevärde och varians:

$$\begin{aligned} E(a \cdot X + b \cdot Y) &= a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) \\ V(a \cdot X + b \cdot Y) &= a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y) + 2ab \cdot C(X, Y) \\ &= a^2 \cdot V(X) + b^2 \cdot V(Y) \quad \text{om } X, Y \text{ oberoende } (C = 0) \end{aligned}$$

kovarians

Kovarians: $C(X, Y) = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]$

Om $a = 1$ och $b = \pm 1$:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad \text{Bara om } X, Y \text{ oberoende, alltså } C(X, Y) = 0$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) \quad \text{Observera plusset i ekvationen!} \\ (b = -1 \rightarrow b^2 = 1)$$

www.matstat.org

37

Summa och differens av slumpvariabler

För flera summander gäller:

$$E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i) \quad \text{Ekvationen för väntevärdet gäller allmänt.}$$

$$V\left(\sum X_i\right) = \sum V(X_i) \quad \text{Ekvationen för variansen gäller bara om alla } X_i \text{ är parvist oberoende!}$$

- Väntevärdet för en summa är alltså detsamma som summan av väntevärdena.
- Om alla variabler är parvist oberoende, så är också variansen för en summa detsamma som summan av varianserna.

www.matstat.org

38

Summa och differens av två oberoende normalfördelade slumpvariabler

$$\begin{aligned} \text{Låt } X &\sim N(\mu_x, \sigma_x) \rightarrow E(X) = \mu_x \quad V(X) = \sigma_x^2 \\ Y &\sim N(\mu_y, \sigma_y) \rightarrow E(Y) = \mu_y \quad V(Y) = \sigma_y^2 \end{aligned} \quad X, Y \text{ oberoende}$$

$$E(X + Y) = \mu_x + \mu_y \text{ och } E(X - Y) = \mu_x - \mu_y$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad D(X + Y) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad D(X - Y) = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

alltid "plus"!

Summa / differens av **två oberoende** normalfördelade slumpvariabler är också normalfördelade, med väntevärde $\mu_x \pm \mu_y$ och standardavvikelse

$$X \pm Y \sim N(\mu_x \pm \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$$

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

www.matstat.org

39

Summa av flera oberoende normalfördelade slumpvariabler

$$\text{Låt } X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- n **oberoende** normalfördelade slumpvariabler med samma väntevärde och samma varians

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n \cdot \mu$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n \cdot \sigma^2 \quad \leftarrow X_i \text{ måste vara oberoende}$$

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sqrt{n} \cdot \sigma$$

www.matstat.org

40

Summa av flera oberoende normalfördelade slumpvariabler

Låt $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ $i = 1, 2, \dots, n$

- n oberoende normalfördelade slumpvariabler med samma väntevärde och samma varians

Summa och differens av flera oberoende normalfördelade slumpvariabler med samma väntevärde och samma varians är också normalfördelade; väntevärdena och varianserna adderas:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{oberoende}$$

$$\Rightarrow \sum_i X_i \sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$$

www.matstat.org

41

Medelvärdet av flera oberoende normalfördelade slumpvariabler

$X_i \sim N(\mu, \sigma)$ $i = 1, 2, \dots, n$ n oberoende normalfördelade slumpvariabler med samma väntevärde och varians

Låt $S = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow E(S) = n \cdot \mu$ och $V(S) = n \cdot \sigma^2$ (se ovan)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \cdot S\right) = \frac{1}{n} \cdot E(S) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \cdot S\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V(S) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

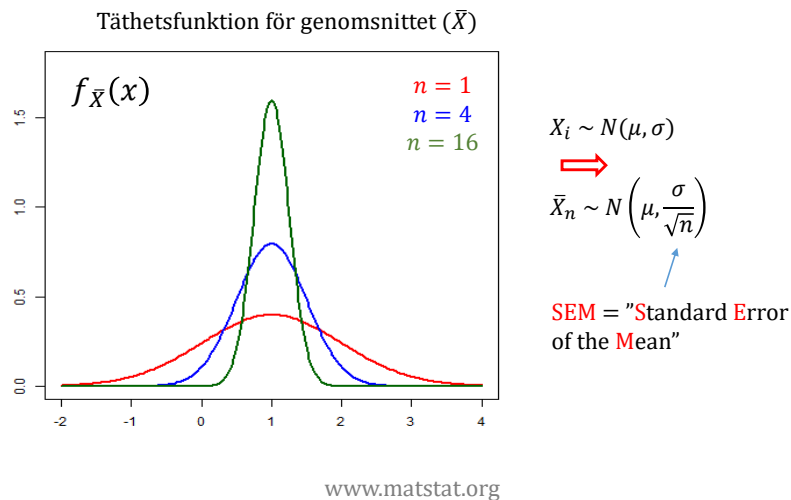
$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Standardavvikelsen för $\bar{X}$ är mindre än för ett enda X_i - viktigt för mätningar!

www.matstat.org

42

Fler mätvärden (n) $\rightarrow$ smalare fördelning för $\bar{X}_n$



43

Exempel: Fördelning för X_i

Ett mätfel är fördelat $N(0, 10)$. Hur stor är sannolikheten att felet är begränsat till $(-3, +3)$?

$$\begin{aligned} P(-3 < X \leq 3) &= F_x(3) - F_x(-3) \\ &= \Phi\left(\frac{3-0}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{10}\right) \\ &= \Phi(0.3) - \Phi(-0.3) = 2 \cdot \Phi(0.3) - 1 \approx 0.236 \end{aligned}$$

Sannolikheten är 23% att felet hållas i gränserna mellan -3 och 3.

www.matstat.org

44

Exempel: Fördelning för $\bar{X}$

Ett mätfel är fördelat $N(0, 10)$. Hur stor är sannolikheten att felets **medelvärde** (över 25 mätningar) är begränsat till $(-3, +3)$?

$$X \sim N(0, 10) \quad \bar{X} \sim N\left(0, \frac{10}{\sqrt{25}}\right) \sim N(0, 2)$$

$$\begin{aligned} P(-3 < X \leq 3) &= F_x(3) - F_x(-3) \\ &= \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{2}\right) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 2 \cdot \Phi(1.5) - 1 \approx 0.866 \end{aligned}$$

Sannolikheten är 87% att felets medelvärde hållas i gränserna mellan -3 och 3. Mycket bättre!

www.matstat.org

45

Centrala gränsvärdessatsen (CGS) (Central Limit Theorem, CLT)

Vi har sett: summor och medelvärden av normalfördelade slumpvariabler är också normalfördelade.

CGS: även **summor/medelvärden av godtyckligt fördelade slumpvariabler X_i är normalfördelade**, om slumpvariablerna X_i

- har samma fördelning
- är oberoende
- är många (limit $\rightarrow \infty$)

$$X_i \sim \text{i.i.d.}(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \mu = E(X) \quad \sigma = D(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \quad \text{AsN betyder "asymptotiskt normalfördelad", det räcker dock med bara N.}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

www.matstat.org

46

Centrala gränsvärdessatsen (CGS) (Central Limit Theorem, CLT)

$$X_i \sim \text{i.i.d.}(\mu, \sigma) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \mu = E(X) \quad \sigma = D(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{AsN}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

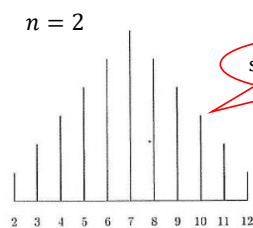
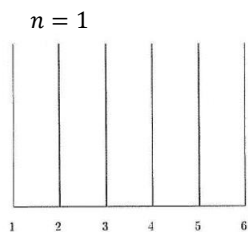
Summor och medelvärden för slumpvariablerna X_i är ungefär normalfördelade, oavsett formen på den givna fördelningen på X_i , bara antalet komponenter är stort nog. **OBS!**: CGS gäller ungefär även om X_i :orna inte har exakt samma fördelning eller är svagt beroende.

www.matstat.org

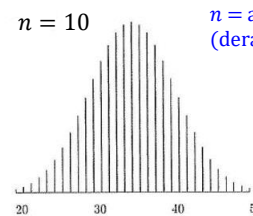
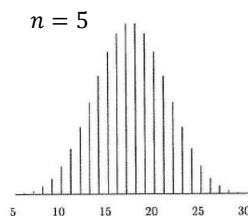
47

Centrala gränsvärdessatsen (CGS)

Exempel: kasta n tärningar - fördelning för summan av ögontalen



se **F2**: två tärningar



n = antalet tärningar
(deras ögontal summeras)

www.matstat.org

Ju större n blir, desto mer liknar fördelningen för summan en **normalfördelning**.

48

Fördelning av medelvärdet och dess standardisering

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad X_i \sim N \text{ eller CGS} \Rightarrow \bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Kom ihåg: En slumpvariabel standardiseras genom att subtrahera dess medelvärde och sedan dela med dess standardavvikelse. Den resulterande slumpvariabeln har väntevärdet 0 och standardavvikelsen 1.



$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Denna variabel är
N(0,1)-fördelad
("standard normal").

www.matstat.org

49

Summa och differens av medelvärden

- Vi har sett att medelvärdet av flera normalfördelade slumpvariabler (med samma väntevärden μ och samma standardavvikelse σ) också är normalfördelat.
- Dessutom är medelvärdet av godtycklig fördelade slumpvariabler (med samma väntevärden μ och samma standardavvikelse σ) också (ungefär) normalfördelat, bara antalet komponenter är stort nog (CGS).

$$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X) \text{ eller CGS} \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n_X}}\right)$$

$$Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y) \text{ eller CGS} \Rightarrow \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_Y}}\right)$$

CGS = Centrala
gränsvärdessatsen

Enligt reglerna för summor av normalfördelade slumpvariabler följer:

$$\bar{X} + \bar{Y} \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right)$$

Summa och
differens av
medelvärden

50

Summa och differens av medelvärden

Exempel: De oberoende slumpvariabler X_1 och X_2 är båda $N(1, 2)$.

Ange fördelningen för genomsnittet $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$. (Blom, 6.17)

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot [E(X_1) + E(X_2)] = \frac{1}{2} \cdot [1 + 1] = 1$$

$$V(\bar{X}) = V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = \frac{1}{4} \cdot [V(X_1) + V(X_2)] = \frac{1}{4} \cdot [2 + 2] = 1$$

$$D(\bar{X}) = \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(1, 1)$$

Detta stämmer överens med den allmänna formeln vi hade ($n = 2$):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

www.matstat.org

51

Sammanfattning: Fördelning av summor och medelvärden

	$X_i \sim N(\mu, \sigma)$	X_i godtycklig fördelad med μ, σ
$Y = \sum_{i=1}^n X_i$	$Y \sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \quad \forall n$	$Y \sim N(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma) \quad n \rightarrow \infty$
$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \forall n$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad n \rightarrow \infty$
	gäller exakt	gäller asymptotiskt

uwe.menzel@matstat.org

52

Summa och differens av N-fördelade s.v.

Exempel: Vissa tillverkade byggnadselement har en längd (i cm) som approximativt är $N(25, \sqrt{0.4})$. Man lägger 20 slumpmässigt valda element intill varandra utan fogar. Hur stor är slh. att deras sammanlagda längd överstiger 505 cm? (Blom, s. 153)

$$X_i \sim N(25, \sqrt{0.4}) \quad Y = \sum_{i=1}^{20} X_i \quad \text{sökes: } P(Y > 505)$$

$$Y \sim N(20 \cdot 25, \sqrt{20} \cdot \sqrt{0.4})$$

$$Y \sim N(500, \sqrt{8})$$

$$\begin{aligned} P(Y > 505) &= 1 - P(Y \leq 505) = 1 - F_Y(505) = 1 - \Phi\left(\frac{505 - 500}{\sqrt{8}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.77) = 1 - 0.9616 = \underline{\underline{0.0384}} \end{aligned}$$

www.matstat.org

53

Exempel, fortsättning: Man lägger ut två rader om 40 element vardera. Hur stor är slh. att skillnaden mellan radernas längder överstiger 10 cm?

(Blom, ändrat)

$$X_i \sim N(25, \sqrt{0.4}) \quad \text{Rad 1: } R_1 \quad \text{Rad 2: } R_2$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{40} X_i \implies R_1 \sim N(40 \cdot 25, \sqrt{40} \cdot \sqrt{0.4}) \quad \text{dvs. } R_1 \sim N(1000, 4)$$

$$\text{Detsamma för rad 2 ...} \quad R_2 \sim N(1000, 4)$$

$$\implies R_1 - R_2 \sim N(0, \sqrt{32})$$

Sökes: $P(|R_1 - R_2| > 10)$ **OBS!:** absoluttecknet!

$$\begin{aligned} P(|R_1 - R_2| > 10) &= 1 - P(|R_1 - R_2| \leq 10) = 1 - P(-10 < R_1 - R_2 \leq 10) \\ &= 1 - [F_{R_1 - R_2}(10) - F_{R_1 - R_2}(-10)] \\ &= 1 - \left[\Phi\left(\frac{10 - 0}{\sqrt{32}}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - 0}{\sqrt{32}}\right) \right] \\ &= 1 + \Phi(-1.77) - \Phi(1.77) = 1 + 1 - \Phi(1.77) - \Phi(1.77) \\ &= 2 - 2 \cdot \Phi(1.77) = 2 - 2 \cdot 0.9616 = \underline{\underline{0.0768}} \end{aligned}$$

www.matstat.org

54

Medelvärde av N-fördelade slumpvariabler

Exempel: Vid användning av en viss mätmetod antas de erhållna värdena vara normalfördelade med väntevärdet 28.0 och standardavvikelsen 0.25. Hur stor är sannolikheten att ett mätvärde ligger mellan 27.5 och 28.5 ?

$$X_i \sim N(28, 0.25)$$

$$\begin{aligned} P(27.5 < X_i \leq 28.5) &= F_{X_i}(28.5) - F_{X_i}(27.5) = \Phi\left(\frac{28.5 - 28.0}{0.25}\right) - \Phi\left(\frac{27.5 - 28.0}{0.25}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = 2 \cdot \Phi(2) - 1 \\ &= \underline{0.954} \end{aligned}$$

Exempel: fortsättning: Hur stor är sannolikheten att det aritmetiska medelvärdet av fyra oberoende mätvärden ligger i samma intervall?

$$\bar{X}_4 \sim N(28, 0.125)$$

$$\begin{aligned} P(27.5 < \bar{X}_4 \leq 28.5) &= F_{\bar{X}_4}(28.5) - F_{\bar{X}_4}(27.5) = \Phi\left(\frac{28.5 - 28.0}{0.125}\right) - \Phi\left(\frac{27.5 - 28.0}{0.125}\right) \\ &= \Phi(4) - \Phi(-4) = \Phi(4) - [1 - \Phi(4)] = 2 \cdot \Phi(4) - 1 \\ &= \underline{0.99994} \end{aligned}$$

www.matstat.org

55

Normalfördelningen

Exempel: En s.v. X är standard-normalfördelad. Beräkna följande slh.:

$$X \sim N(0, 1)$$

a) $P(X \leq 1.82)$?

kontinuerlig s.v.!

tabell!

Jogreus, s. 339

$$P(X \leq 1.82) = P(X < 1.82) = F_X(1.82) = \Phi(1.82) = \underline{0.9656}$$

$$b) P(X \leq -0.35) = \Phi(-0.35) = 1 - \Phi(0.35) = 1 - 0.6368 = \underline{0.3632}$$

$$\begin{aligned} c) P(-1.2 < X \leq 0.5) &= \Phi(0.5) - \Phi(-1.2) = \Phi(0.5) - [1 - \Phi(1.2)] \\ &= \Phi(0.5) - 1 + \Phi(1.2) = 0.6915 - 1 + 0.8849 = \underline{0.5764} \end{aligned}$$

d) $P(X > a) = 0.05$ Söker: a

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a) = 1 - \Phi(a) = 0.05$$

$$\rightarrow \Phi(a) = 0.95 \rightarrow \underline{a = 1.64} \quad (\text{tabell})$$

e) $P(|X| < a) = 0.95$ Söker: a

$$P(|X| < a) = P(-a < X \leq +a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - [1 - \Phi(a)]$$

$$= 2 \cdot \Phi(a) - 1 = 0.95 \rightarrow \Phi(a) = 0.975 \rightarrow \underline{a = 1.96 = \lambda_{0.025}}$$

56

Normalfördelningen

Exempel: En slumpvariabel X är standard-normalfördelad.

För en annan slumpvariabel Y gäller: $Y = 3 \cdot X + 2$

Ange väntevärdet, varians och standardavvikelse för Y !

$$E(X) = 0 ; \quad V(X) = 1 \quad \text{givna}$$

Svar:

$$E(Y) = E(3 \cdot X + 2) = 3 \cdot E(X) + 2 = 2$$

$$V(Y) = V(3 \cdot X + 2) = 3^2 \cdot V(X) = 9$$

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{9} = 3$$

www.matstat.org

57

Normalfördelningen

Exempel: En slumpvariabel X är normalfördelad med $X \sim N(5, 2)$

Beräkna följande sannolikheter:

a) $P(X \leq 6)$? $P(X \leq 6) = F_X(6) = \Phi\left(\frac{6-5}{2}\right) = \Phi(0.5) = 0.6915$

b) $P(1.8 < X < 7.2)$?

$$\begin{aligned} P(1.8 < X < 7.2) &= P(1.8 < X \leq 7.2) = F_X(7.2) - F_X(1.8) \\ &= \Phi\left(\frac{7.2-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1.8-5}{2}\right) = \Phi(1.1) - \Phi(-1.6) = \Phi(1.1) - [1 - \Phi(1.6)] \\ &= \Phi(1.1) - 1 + \Phi(1.6) = 0.8643 - 1 + 0.9452 = 0.8095 \end{aligned}$$

c) $P(X \leq a) = 0.05$ Söker: a

$$P(X \leq a) = F_X(a) = \Phi\left(\frac{a-5}{2}\right) = 0.05 \quad \begin{array}{l} \text{värdet 0.05 inte i tabellen} \rightarrow \\ \text{använd } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{5-a}{2}\right) &= 0.95 \quad \text{tabell} \rightarrow \quad \frac{5-a}{2} = 1.64 \quad \text{för att } \Phi(1.64) = 0.95 \\ &\rightarrow a = 5 - 2 \cdot 1.64 = 1.72 \end{aligned}$$

58