Grundlagen der Mathematischen Statistik

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

1

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Ein Zufallsversuch kann mehrere Zufallsvariablen erzeugen:

- Wurf mit zwei Würfeln:
  - Zufallsvariable X = Augenzahl Würfel 1
  - Zufallsvariable Y = Augenzahl Würfel 2

  zweidimensionale Zufallsvariable
- Wurf mit einem Pfeil auf eine Zielscheibe:
  - Zufallsvariable X = Höhe über der unteren Kante
  - Zufallsvariable Y = horizontaler Abstand zur linken Kante
- zufällig ausgewählte Person:
  - Zufallsvariable X = Größe in cm
  - Zufallsvariable Y = Gewicht in kg
  - Zufallsvariable Z = Blutdruck in mmHg

  dreidimensionale Zufallsvariable
- zufällig ausgewählte Familie:
  - Zufallsvariable X = Anzahl der Mädchen
  - Zufallsvariable Y = Anzahl der Jungen

2

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Zweidimensionale Zufallsvariable = Funktion $\Omega \to \mathbb{R}^2$

$i = 0, 1, 2, \ldots$
$j = 0, 1, 2, \ldots$

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ (große Buchstaben): Zufallsvariablen
i, j (kleine Buchstaben): reelle Werte (für diskrete Zufallsvariablen oft ganze Zahlen)

Die Zufallsvariablen (X, Y) werden **diskret** genannt wenn sowohl X als auch Y nur eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl verschiedener Werte annehmen können.

Wahrscheinlichkeits-funktion: $\boxed{P(X = i, Y = j) = p_{X,Y}(i, j)}$ "joint probability distribution"

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für jede Kombination von i und j an (d.h. für den gesamten Ereignisraum).

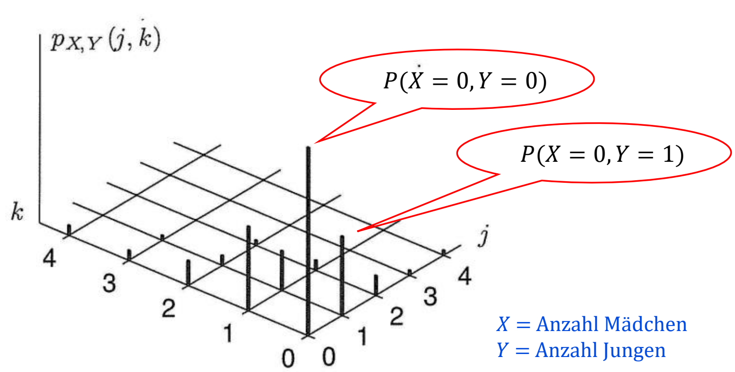
Normierung: $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{X,Y}(i, j) = 1}$ [Axiom 2: $P(\Omega) = 1$]

www.matstat.org

3

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** kann durch ein Säulendiagramm veranschaulicht werden.



X = Anzahl Mädchen
Y = Anzahl Jungen

Bild: Blom et al, s. 85 ("barnkullar")

www.matstat.org

4

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** kann durch eine Tabelle veranschaulicht werden. (gleiches Beispiel wie oben, aus Blom et al.)

$P(X=0, Y=0)$

$P(X=3, Y=0)$

Y/X	X=0	X=1	X=2	X=3	X=4
Y=0	0.38	0.16	0.04	0.01	0.01
Y=1	0.17	0.08	0.02	-	-
Y=2	0.05	0.02	0.01	-	-
Y=3	0.02	0.01	-	-	-
Y=4	0.02	-	-	-	-

$P(X=1, Y=3)$

X = Anzahl Mädchen
Y = Anzahl Jungen

www.matstat.org

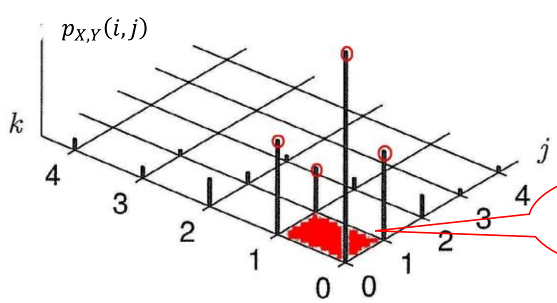
5

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Verteilungs-funktion:

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i \leq x} \sum_{j \leq y} p_{X,Y}(i,j)}$$

- analog zu eindimensionaler Verteilungsfunktion
- x und y sind reelle Zahlen, die Verteilungsfunktion ist also eine kontinuierliche "zweidimensionale Treppenfunktion"
- wiederum: das $\leq$ Zeichen ist für diskrete Zufallsvariablen wichtig!



diese vier Wahrsch. müssen summiert werden, um $F_{X,Y}(1,1)$ zu erhalten

www.matstat.org

6

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Marginalverteilung (”margin” = Rand)

Beispiel: Familie mit Kindern (Blom et al.). Wir nehmen an, wir haben die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = i, Y = j)$, also die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Mädchen (X) und Jungen (Y).
Wir wollen nun **nur** die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Mädchen in einer zufällig gewählten Familie ermitteln, ungeachtet der Anzahl der Jungen, d.h. wir brauchen die Verteilung für die Zufallsvariable X (Mädchen). Wir wollen also die eindimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_X(i)$ aus der zweidimensionalen Verteilung $p_{X,Y}(i,j)$ berechnen:

X = Anzahl Mädchen
Y = Anzahl Jungen

$$\boxed{p_X(i) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{X,Y}(i,j)}$$

Summation über alle Werte für die Zufallsvariable Y, d.h. über j

$$\boxed{p_Y(j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{X,Y}(i,j)}$$

Summation über alle Werte für die Zufallsvariable X, d.h. über i

www.matstat.org

7

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Marginalverteilung (”margin” = Rand)

X = Anzahl Mädchen
Y = Anzahl Jungen

Y/X	X=0	X=1	X=2	X=3	X=4	Σ
Y=0	0.38	0.16	0.04	0.01	0.01	0.60
Y=1	0.17	0.08	0.02	-	-	0.27
Y=2	0.05	0.02	0.01	-	-	0.08
Y=3	0.02	0.01	-	-	-	0.03
Y=4	0.02	-	-	-	-	0.02
Σ	0.64	0.27	0.07	0.01	0.01	1

$P(Y = 0)$

$P(Y = 2)$

$P(Y = 4)$

$P(X = 0)$

$P(X = 2)$

$P(X = 4)$

www.matstat.org

8

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Multinomialverteilung:

Beispiel: Urne mit Kugeln mit r verschiedenen Farben, wir ziehen n Kugeln mit Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:

- k_1 Kugeln der Farbe 1, (Zufallsvariable X_1: Anzahl gezogener Kugeln mit Farbe 1)
- k_2 Kugeln der Farbe 2, (Zufallsvariable X_2: Anzahl gezogener Kugeln mit Farbe 2)
- …
- k_r Kugeln der Farbe r ? (Zufallsvariable X_r: Anzahl gezogener Kugeln mit Farbe r)

Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Multinomialverteilung:

$$\boxed{p_{X_1, X_2, \cdots, X_r}(k_1, k_2, \cdots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!} \cdot {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k_r}}$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$ denn jede Ziehung **muss** eine der vorliegenden Farben ergeben

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = n$$ insgesamt n Ziehungen → die Anzahlen k_i müssen zu n summieren

www.matstat.org

9

Diskrete zweidimensionale Zufallsvariablen

Multinomialverteilung, Spezialfall $r = 2$:

wenn r (Anzahl der Farben) nur 2 ist (z. B. schwarz und weiß): $r = 2$

$$p_{X_1, X_2}(k_1, k_2) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!} \cdot {p_1}^{k_1} \cdot {p_2}^{k_2}$$ Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$k_2 = n - k_1$$ Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln muss gleich der Anzahl der gezogenen Kugeln sein

$$p_2 = 1 - p_1$$ Wahrscheinlichkeiten für weiß oder schwarz müssen sich zu 1 addieren

$$p_{X_1, X_2}(k_1, k_2) = \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot {p_1}^{k_1} \cdot (1-p_1)^{(n-k_1)} = \underbrace{\binom{n}{k_1} \cdot {p_1}^{k_1} \cdot (1-p_1)^{(n-k_1)}}_{\text{Binomialverteilung}}$$

Die Binomialverteilung ist ein Spezialfall der Multinomialverteilungen für $r = 2$

www.matstat.org

10

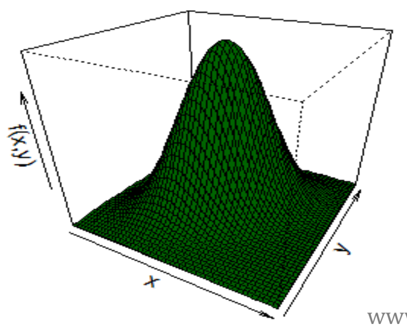
Kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen

Zweidimensionale Zufallsvariable: Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

X, Y (große Buchstaben): Zufallsvariablen
i, j (kleine Buchstaben): reelle Werte

Die Zufallsvariablen (X, Y) werden **kontinuierlich** genannt wenn X und Y **nicht** diskret sind.

(Simultane) Dichtefunktion $f_{X,Y}(x, y)$



Normierung:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx dy = 1}$$

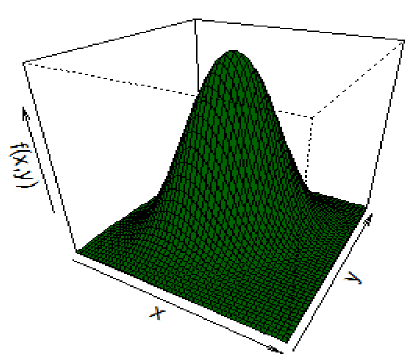
(Axiom 2)

www.matstat.org

11

Kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen

Dichtefunktion $f_{X,Y}(x, y)$



Wahrscheinlichkeit dass (X, Y) in einem Gebiet $\boldsymbol{A}$ landen:

$$\boxed{P(X, Y \in A) = \int \int_A f_{X,Y}(x,y)\, dx dy}$$

Die Dichtefunktion wird über dieses Gebiet $\boldsymbol{A}$ integriert.

www.matstat.org

12

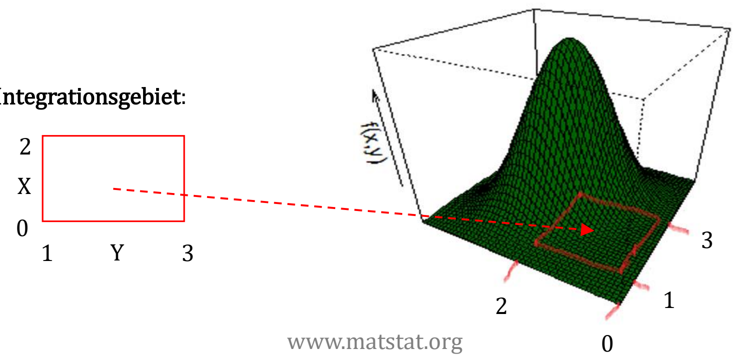
Kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen

Beispiel: Sei $f_{X,Y}(x,y)$ gegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 0 und 2 und Y zwischen 1 und 3 liegt:

$$P(X,Y \in A) = \int\int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$P(0 < X \le 2, 1 < Y \le 3) = \int_1^3 \int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Integrationsgebiet:



Kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion:

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv}$$

Umgekehrt gilt:

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} F_{X,Y}(x,y)}$$

Kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen

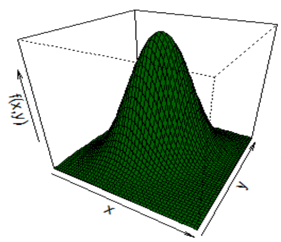
Marginalverteilungen:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Berechnung der Marginalverteilung für X aus der 2-dimensionalen Dichtefunktion.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Berechnung der Marginalverteilung für Y aus der 2-dimensionalen Dichtefunktion.



Integration über jeweils eine Dimension

www.matstat.org

15

Kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen

Marginalverteilung für die Verteilungsfunktion:

$$\boxed{F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)} \qquad \boxed{F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) &= \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du \\ &= \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\,dv}_{f_X(u)}\,du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\end{aligned}$$

www.matstat.org

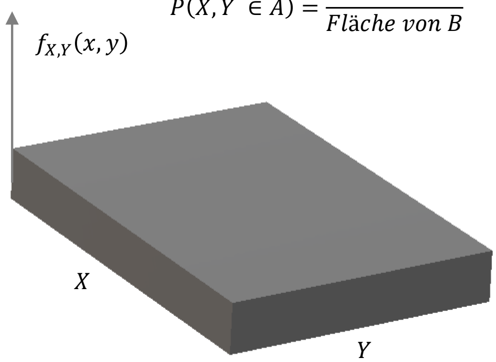
16

Kontinuierliche gleichförmige (2-dim.) Verteilung

Simultane **Dichtefunktion**: $f_{X,Y}(x,y) = const$ für alle x, y

Gleichförmige kontinuierliche 2-dim. Verteilung:
Seien X, Y auf einem Gebiet $\boldsymbol{B}$ definiert (Ereignisraum). Wenn X, Y kontinuierlich gleichförmig verteilt sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass X, Y in einem Teilgebiet $\boldsymbol{A}$ landen:

$$P(X, Y \in A) = \frac{Fläche\ von\ A}{Fläche\ von\ B}$$



www.matstat.org

17

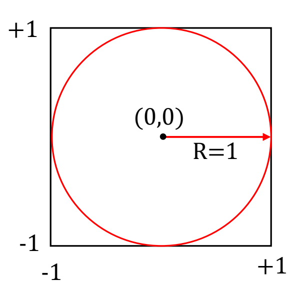
Gleichförmige kontinuierliche Verteilung

$$P(X, Y \in A) = \frac{Fläche\ von\ A}{Fläche\ von\ B}$$

<u>Beispiel</u>: Blom et al., S. 88

Ein Punkt wird zufällig im Quadrat $(X, Y) = (\pm 1, \pm 1)$ ausgewählt.

Suche: Wahrscheinlichkeit für $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$?



$X^2 + Y^2 \leq 1$

<u>Zur Erinnerung</u>: $X^2 + Y^2 = R^2$ ist die Gleichung für einen Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt (0,0)

$$P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{Fläche\ des\ Kreises}{Fläche\ des\ Rechteckes} = \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$$

www.matstat.org

18

Unabhängige mehrdimensionale Zufallsvariablen

Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, **wenn**:

Diskrete zwei-dim. Zufallsvariablen:

$$p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) \cdot p_Y(j) \qquad \text{für } \textbf{alle } i,j$$

Kontinuierliche zwei-dim. Zufallsvariablen:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{für } \textbf{alle } x,y$$

Zur Erinnerung:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
wenn A und B unabhängig

Diskrete und kontinuierliche zweidimensionale Zufallsvariablen:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \qquad \text{für } \textbf{alle } x,y$$

www.matstat.org

19

Unabhängige mehrdimensionale Zufallsvariablen

Diskrete 2-dim. Zufallsvariable: $p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) \cdot p_Y(j)$ für **alle** i, j

$p_{X,Y}(1,1)$ $p_Y(1)$

Y/X	X=1	X=2	X=3	marg.
Y=1	0.04	0.06	0.1	0.2
Y=2	0.02	0.03	0.05	0.1
Y=3	0.14	0.21	0.35	0.7
marg.	0.2	0.3	0.5	1

$p_X(1)$

$p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) \cdot p_Y(j)$ für **alle** i, j

$0.04 = 0.2 \cdot 0.2$
$0.06 = 0.3 \cdot 0.2$
...
...
$0.35 = 0.5 \cdot 0.7$

wenn Unabhängigkeit vorliegt muss das für alle Zellen gelten!

www.matstat.org

20

Unabhängige mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel: Lebensdauer zweier Glühlampen
Zufallsvariable X: Lebensdauer Glühlampe 1
Zufallsvariable Y: Lebensdauer Glühlampe 2

Annahme: unabhängig, beide exponentiell verteilt

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} a \cdot e^{-a \cdot x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{array} \right\} \qquad f_Y(y) = \left\{ \begin{array}{cc} b \cdot e^{-b \cdot y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{array} \right\}$$

Dichtefunktionen

Suche: Wahrscheinlichkeit dass beide Glühlampen eine geringere Lebensdauer als t haben: $P(X \leq t, Y \leq t)$?

$$\begin{aligned} P(X \leq t, Y \leq t) &= F_{X,Y}(t,t) = \int_0^t \int_0^t f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy && \text{nutze Unabhängigkeit} \\ &= \int_0^t \int_0^t f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy && \text{nutze Integrationsregeln} \\ &= \int_0^t f_X(x)\, dx \cdot \int_0^t f_Y(y)\, dy && \text{Verteilungsfunktion für } Exp(\mu) \\ &= F_X(t) \cdot F_Y(t) = \left(1 - e^{-a \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-b \cdot t}\right) \end{aligned}$$

www.matstat.org

21

Maximum von mehreren Zufallsvariablen

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **unabhängige** Zufallsvariablen (mit bekannter Verteilung)

Suche: Verteilung für $Z = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

- $max(X_i) \leq z \iff alle\ X_i \leq z$ (gilt in **beide** Richtungen; die Ereignisse haben gleiche Wahrscheinlichkeit)

$$P[max(X_i) \leq z] = \mathrm{P}[(X_1 \leq z) \cap (X_2 \leq z) \cap \ \ldots \ \cap (X_n \leq z)]$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 \leq z) \cdot P(X_2 \leq z) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq z)$$

wenn alle X_i paarweise unabhängig sind

$$= F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdot \ \ldots \ \cdot F_{X_n}(z)$$

nutze Definition für F_X

$$\boxed{F_Z(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z)}$$

Verteilung für das Maximum mehrerer unabhängiger Zufallsvariablen

$$F_Z(z) = F_X(z)^n$$

wenn alle X_i (unabhängig sind und) die gleiche Verteilung haben

www.matstat.org

22

Maximum von mehreren Zufallsvariablen

Beispiel: Lebensdauer eines elektronischen Bauteils mit zwei Komponenten:
Ein elektronisches Bauteil enthält zwei Komponenten deren Lebensdauern X bzw. Y unabhängig und exponentiell verteilt sind:

$$F_X(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 - e^{-a \cdot x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{matrix} \right\} \qquad F_Y(y) = \left\{ \begin{matrix} 1 - e^{-b \cdot y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{matrix} \right\}$$

Das Bauteil funktioniert so lange wie mindestens eine der Komponenten funktioniert. Die Lebensdauer des Bauteils ist also das Maximum der Lebensdauern von X und Y.
Suche: Dichtefunktion für $Z = max(X, Y)$

$$F_Z(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = (1 - e^{-a \cdot z}) \cdot (1 - e^{-b \cdot z})$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = a \cdot e^{-a \cdot z} \cdot (1 - e^{-b \cdot z}) + b \cdot e^{-b \cdot z} \cdot (1 - e^{-a \cdot z})$$

für $z > 0$; sonst 0

www.matstat.org

24

Minimum von mehreren Zufallsvariablen

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **unabhängige** Zufallsvariablen (mit bekannter Verteilung)

Suche: Verteilung för $Z = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

- $\min(X_i) > z \iff alle\ X_i > z$ (gilt in **beide** Richtungen; die Ereignisse haben gleiche Wahrscheinlichkeit)

$$P[\min(X_i) > z] = \mathrm{P}[(X_1 > z) \cap (X_2 > z) \cap \ \ldots \ \cap (X_n > z)]$$

$$P(Z > z) = P(X_1 > z) \cdot P(X_2 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z)$$

wenn alle X_i paarweise unabhängig sind

$$1 - F_Z(z) = \left(1 - F_{X_1}(z)\right) \cdot \left(1 - F_{X_2}(z)\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - F_{X_n}(z)\right)$$

$P(X_i > z) = 1 - F_{X_i}(z)$

$$\boxed{F_Z(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - F_{X_i}(z)\right]}$$

Verteilung für das Minimum mehrerer unabhängiger Zufallsvariablen

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n$$

wenn alle X_i (unabhängig sind und) die gleiche Verteilung haben

www.matstat.org

25

Minimum mehrerer Zufallsvariablen

Beispiel: Lebensdauer eines elektronischen Bauelementes, Blom et al. s. 93
Ein elektronisches Bauteil enthält zwei Komponenten (X, Y) welche **in Serie** gekoppelt sind. Die Lebensdauern beider Komponenten sind exponentiell verteilt.
Suche: Verteilung für die Lebensdauer des Bauteils (Z) !

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 - e^{-a \cdot x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{array} \right\} \qquad F_Y(y) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 - e^{-b \cdot y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{array} \right\}$$

Serienschaltung: Lebensdauer des Bauteils = **Minimum** der Lebensdauern der Komponenten $\boldsymbol{Z = min(X, Y)}$

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] = 1 - [1 - (1 - e^{-a \cdot z})] \cdot [1 - (1 - e^{-b \cdot z})]$$

$$= 1 - e^{-a \cdot z} \cdot e^{-b \cdot z} = 1 - e^{-(a+b) \cdot z} \qquad z > 0$$

$$f_Z(z) = (a + b) \cdot e^{-(a+b) \cdot z} \qquad z > 0$$ Dichtefunktion, nach Ableiten

$$\boxed{Z \sim Exp(a + b)}$$ Serienschaltung

www.matstat.org

26

Summe von zwei Zufallsvariablen

X, Y: **diskrete** Zufallsvariablen, $p_{X,Y}(i, j)$ sei bekannt (simultane Wahrscheinlichkeitsfunktion)

$Z = X + Y$ **Summe**, Zufallsvariable

$$p_Z(k) = P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i, j)$$

wird über alle i und j summiert deren Summe gleich k ist

$i + j = k \;\rightarrow\; j = k - i$

$$p_Z(k) = \sum_{i+j=k} p_{X,Y}(i, j) = \sum_{i=0}^{k} p_{X,Y}(i, k - i)$$

$$p_Z(k) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i) \cdot p_Y(k - i)$$

... wenn X und Y unabhängig sind

Y\X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Würfel, $k = 6$

www.matstat.org

27

Summe von zwei Zufallsvariablen

X, Y: **Kontinuierliche** Zufallsvariablen, $f_{X,Y}(x,y)$ sei bekannt (simultane Dichtefunktion)

$Z = X + Y$ **Summe**, Zufallsvariable

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq Z) = \iint_{x+y \leq z} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Integrationsgebiet!

Die **Dichtefunktionen** erhält man durch Ableitung.

Wenn X und Y unabhängig sind erhält man (Herleitung Blom et al., S. 96):

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

Faltungsformel

<u>Anmerkung</u>: Differenzen zweier Zufallsvariablen, $Z = X - Y$, können behandelt werden indem man formal $-Y$ addiert.

www.matstat.org

28

Summe von Zufallsvariablen

<u>Beispiel</u>: Es seien X und Y **unabhängige** und exponentiell verteilte Zufallsvariablen mit demselben Parameter λ. Berechne die Dichtefunktion für die Summe von X und Y !

$$f_X(x) = \left\{ \begin{matrix} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{matrix} \right\} \qquad f_Y(y) = \left\{ \begin{matrix} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{matrix} \right\}$$

$X, Y \sim Exp(\lambda)$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (z-x)}\, dx$$

Vorsicht!: $z - x > 0$ notwendig!

$$= \int_0^z \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z}\, dx = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot \int_0^z 1\, dx = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot z$$

$$\boxed{f_Z(z) = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot z} \cdot z}$$

Dichtefunktion für die Summe zweier **unabhängiger**, exponentiell verteilter Zufallsvariablen mit gleichem λ $(z > 0)$.

Verallgemeinerung für **mehr als zwei Summenden** $(z > 0)$:

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot z^{n-1} \cdot e^{-\lambda \cdot z}}$$

Dichtefunktion für die Summe von n **unabhängigen**, exponentiell verteilten Zufallsvariablen (Gammaverteilung mit $c = n$)

www.matstat.org

29