Grundlagen der Mathematischen Statistik

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Quantile

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

1

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable

- X : diskrete oder kontinuerliche Zufallsvariable (Z.v.)
- $p_X(k)$: Wahrscheinlichkeitsfunktion; $f_X(x)$: Dichtefunktion

Erwartungswert: gewichteter Mittelwert; jedes Elementarereignis wird mit seiner Wahrscheinlichkeit gewichtet

Beispiel : diskrete Zufallsvariable X

k	1	2	3
$p_X(k)$	$1/6$	$1/3$	$1/2$

der arithmetische Mittelwert ist:

$$M = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

Erwartungswert: $\boldsymbol{E(X)}$ "Expectation"

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6} = 2\,\frac{1}{3}$$

Gewichte addieren zu 1

- die wahrscheinlichsten Elementarereignisse bekommen die größten Gewichte
- weniger wahscheinliche Elementarereignisse bekommen kleinere Gewichte

www.matstat.org

2

Definition des Erwartungswertes

- X : diskrete oder kontinuerliche Zufallsvariable (Z.v.)
- $p_X(k)$: Wahrscheinlichkeitsfunktion; $f_X(x)$: Dichtefunktion

Diskrete Zufallsvariablen:

$$\boxed{E(X) = \sum_{k\in\Omega} k \cdot p_X(k)}$$

- jeder Summand = Elementarereignis $*$ dessen W.
- summiert wird über alle k von Ω

Kontinuierliche Zufallsvariablen:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx}$$

- Integral an Stelle der Summe
- integriert wird über den Wertebereich von X

Der Erwartungswert wird oft mit μ bezeichnet, also $\boldsymbol{\mu = E(X)}$

www.matstat.org

3

Erwartungswert für eine Funktion einer Zufallsvariablen

Funktion einer Zufallsvariable X: X^2 ; $2 \cdot X$; X^3 ; e^X ; ...

$$E(X) = \int x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$E(X^2) = \int x^2 \cdot f_X(x)\, dx$$

$$E(e^X) = \int e^x \cdot f_X(x)\, dx$$

$M_X(t) = E(e^{tx})$ "moment-generating function"

$E(X^n) = \left[\frac{d^n M_x}{dt^n}\right]_{t=0}$ n-tes Moment = n-te Ableitung für $t = 0$

Allgemein:

kontinuerlich

$$E[g(X)] = \int g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

gleiche Funktion

diskret

$$E[g(k)] = \sum_k g(k) \cdot p_X(k)$$

gleiche Funktion

www.matstat.org

4

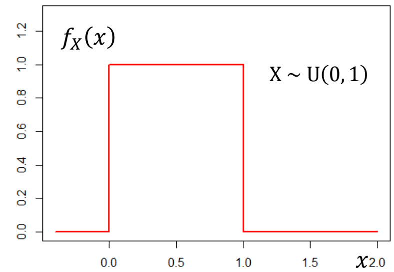
Erwartungswert für eine Funktion einer Zufallsvariablen

Beispiel Parkgebühr: die Parkzeit sei eine gleichförmig auf dem Intervall (0, 1) verteilte Zufallsvariable **X** : ... man schreibt auch $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$; U von "uniform"

die **Dichtefunktionen** ist also:

$$f_X(x) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 < X \leq 1 \\ 0 & sonst \end{Bmatrix}$$

- gleichförmig verteilt auf (0, 1)
- X ~ U(0, 1)



Erwartungswert:

$$E(X) = \int x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$ "mittlere Parkzeit"

www.matstat.org

5

Erwartungswert für eine Funktion einer Zufallsvariablen

Beispiel, Fortsetzung : die Parkgebühr sei 1 Euro Startgebühr plus 20 Cent/Stunde. Die Parkgebühr ist also auch eine Zufallsvariable (***Y***).

Es ist $Y = 100 + 20 \cdot X$ (Y ist eine Funktion einer Z.v., und daher auch eine Z.v.)

Zur Erinnerung: $f_X(x) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 < X \leq 1 \\ 0 & sonst \end{Bmatrix}$ Dichtefunktion für die Parkzeit

Erwartungswert für die Parkgebühr :

$$E(Y) = E(\underbrace{100 + 20 \cdot X}_{g(x)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(100 + 20 \cdot X)}_{g(x)} \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^1 (100 + 20 \cdot X) \cdot 1\, dx$$

$$= [100 \cdot x]_0^1 + [10 \cdot x^2]_0^1 = 100 + 10 = \underline{\underline{110}}$$

(das sind 100 Cent für die Startgebühr und 10 Cent für die mittlere ("erwartete") Parkzeit von einer halben Stunde)

uwe.menzel@matstat.org

6

Die Varianz einer Zufallsvariable

- X : diskrete oder kontinuerliche Zufallsvariable (Z.v.)
- $p_X(k)$: Wahrscheinlichkeitsfunktion; $f_X(x)$: Dichtefunktion

Die Varianz beschreibt die Streuung einer Z.v.. Bezeichnung: $V(X)$

Definition: $\boxed{V(X) = E[(X-\mu)^2]}$ wobei $\mu = E(X)$

Oft werden die Bezeichnungen $\boldsymbol{\sigma^2}$ oder $\boldsymbol{\sigma_x^2}$ für $V(X)$ verwendet

Es ist: $E[g(X)] = \int g(x) \cdot f_X(x)\,dx$ sei $g(x) = (x-\mu)^2$

bzw.: $E[g(k)] = \sum_k g(k) \cdot p_X(k)$ sei $g(k) = (k-\mu)^2$

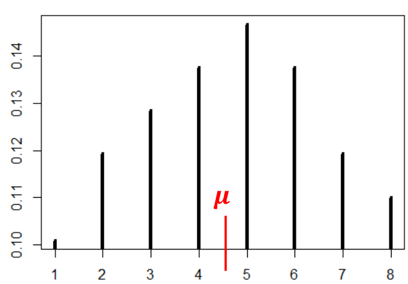
kontinuierliche Z.v. diskrete Z.v.

$\Rightarrow$ $\boxed{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,dx}$ $\boxed{V(X) = \sum_k (k-\mu)^2 \cdot p_X(k)}$

7

Varianz, Illustration (für diskrete Z.v.)

$$V(X) = \sum_k \underbrace{(k-\mu)^2}_{\text{quadratischer Abstand vom Erwartungswert}} \cdot p_X(k)$$



$k - \mu$

Elementarereignisse, die weit weg vom Mittelwert μ entfernt liegen und gleichzeitig eine große Wahrscheinlichkeit $p_X(k)$ haben, tragen viel zur Varianz bei., d.h. hohe Säulen weit weg vom Erwartungswert μ verursachen große Varianz.

8

Varianz, alternativer Ausdruck

$$V(X) = \int (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int (x^2 + \mu^2 - 2\mu x) \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int x^2 \cdot f_X(x)\,dx + \mu^2 \cdot \underbrace{\int f_X(x)\,dx}_{=1} - 2\mu \cdot \underbrace{\int x \cdot f_X(x)\,dx}_{=E(X)=\mu}$$

$$= E(X^2) + \mu^2 - 2\cdot\mu^2 = \underline{\underline{E(X^2) - \mu^2}}$$ dies ist oft leichter zu berechnen

also:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \mu^2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx$$ wenn X kontinuerlich

$$E(X^2) = \sum_k k^2 \cdot p_X(k)$$ wenn X diskret

uwe.menzel@matstat.org

9

Berechnung der Varianz

<u>Beispiel</u>: diskrete Zufallsvariable mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

k	1	2	3	4
$p_X(k)$	$^1/_8$	$^2/_8$	$^4/_8$	$^1/_8$

Berechne die Varianz $V(X)$!

$$\mu = E(X) = \underbrace{1\cdot\frac{1}{8}}_{k\cdot p_X(k)} + 2\cdot\frac{2}{8} + 3\cdot\frac{4}{8} + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{21}{8}$$

$$\mu^2 = \frac{21^2}{64}$$

$$E(X^2) = \underbrace{1^2\cdot\frac{1}{8}}_{k^2\cdot p_X(k)} + 2^2\cdot\frac{2}{8} + 3^2\cdot\frac{4}{8} + 4^2\cdot\frac{1}{8} = \frac{61}{8}$$

$$V(X) = \frac{61}{8} - \frac{21^2}{64} = \frac{61\cdot 8 - 21^2}{64} = \underline{\underline{0.73}}$$

$V(X)$ für Würfel ??

www.matstat.org

10

Standardabweichung für eine Zufallsvariable

$\boxed{D(X) = \sqrt{V(X)}}$ $D(X) \geq 0$; die positive Wurzel wird gewählt

Wird oft mit σ oder σ_x bezeichnet, also $\sigma_x = D(X)$

Die Standardabweichung hat die gleiche Einheit (Meter, Sekunde, ...) wie die Zufallsvariable X.

Variationskoeffizient

$$\boxed{R(X) = \frac{D(X)}{E(X)}}$$

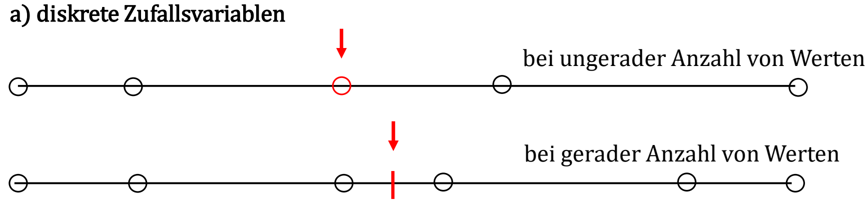
- Streuung in Relation zum Erwartungswert (wenn der Erwartungswertgroß ist, kann eventuell eine größere Streuung akzeptiert werden).
- dimensionslos
- wird oft in % angegeben

11

Median

"mittlerer Wert" einer empirischen Verteilung oder Dichtefunktion...

a) diskrete Zufallsvariablen

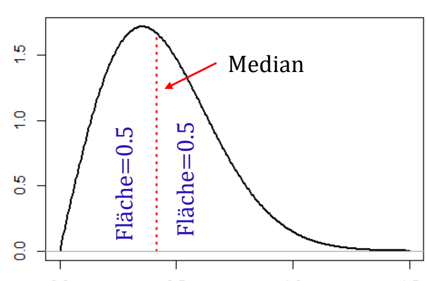


b) kontinuierliche Zufallsvariablen

Der Median teilt die Fläche unter der Dichtefunktionen in zwei gleiche Teile Daher gilt für die Verteilungsfunktion:

$$\boxed{F_X(x_{0.5}) = 0.5}$$

$\boldsymbol{x_{0.5}}$ = Bezeichnung für den Median



12

Median

- Der Median ist nicht das gleiche wie der Erwartungswert!
- Median und Erwartungswert fallen nur zusammen wenn die Verteilung symmetrisch ist!

Beispiel :

$$F_Y(y) = y^2 \qquad \text{für} \quad 0 < X \leq 1 \ ; \ \ 0 \ \ \text{sonst}$$

Berechne den Median!:

$$F_X(x_{0.5}) = 0.5 \qquad x_{0.5} = \text{Median}$$

$$\Rightarrow \quad x_{0.5}^2 = \frac{1}{2} \qquad x_{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

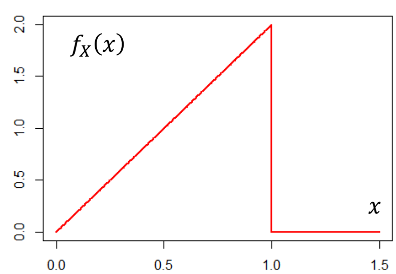
www.matstat.org

13

Beispiel

Z.v. X mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 2 \cdot x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & sonst \end{array} \right\}$$



Erwartungswert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 2 \cdot x\, dx = \int_0^1 2 \cdot x^2\, dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Varianz:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2 \cdot x\, dx = 2 \cdot \int_0^1 x^3\, dx = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} - \frac{8}{18} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$$

www.matstat.org

14

Beispiel, Forts.

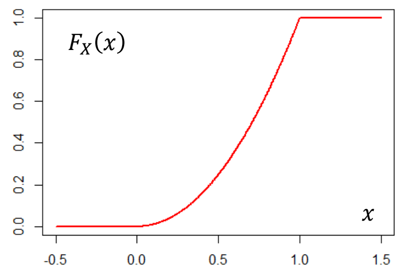
Z.v. X mit Dichtefunktion $f_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 2 \cdot x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & sonst \end{array} \right\}$

Verteilungsfunktion

$0 < x \leq 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_0^x 2 \cdot t\, dt = 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \underline{\underline{x^2}}$$

$$F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{array} \right\}$$



Median

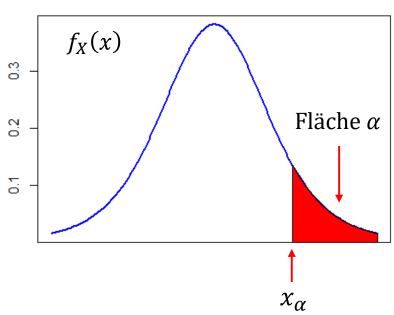
$F_X(x_{0.5}) = 0.5 \Rightarrow x_{0.5}^2 = 0.5 \Rightarrow x_{0.5} = \underline{\underline{\sqrt{0.5}}}$

www.matstat.org

15

Quantile

$\boldsymbol{x_\alpha}$ = Bezeichnung für α–Quantil $0 < \alpha \leq 1$



- Quantile unterteilen empirische Daten, Verteilungs- oder Dichtefunktionen.
- Am einfachsten zu merken: das Quantil x_α ist so positioniert, dass die Fläche unter der Dichtefunktionen **rechts** von x_α gerade α ist.

Wichtig!: Es gibt eine alternative Definition, besonders im englischen Sprachraum. Nach dieser Definition liegt x_α so, dass die Fläche unter Dichtefunktionen **links** von x_α gerade α ist. In dieser Vorlesung wird nur erstere Definition verwendet!

Wenn die Fläche **rechts** vom Quantil α ist, so muss die Fläche **links** $1 - \alpha$ sein (Axiom 2). Mit Hilfe der Definition für die Verteilungsfunktionen folgt:

$$\boxed{F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha}$$

Quantile werden gewöhnlich mit dieser Formel berechnet (wenn es möglich ist, den Ausdruck nach x_α aufzulösen).

www.matstat.org

16

Beispiel: Berechnung des Quantils $x_{0.05}$

Sei X eine Z.v. mit folgender Dichtefunktion: $f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

1. **Verteilungsfunktion:**

$x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{0}^{x} 2 \cdot e^{-2t}\,dt = 2 \cdot \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^x = \left[e^{-2t}\right]_x^0 = \underline{\underline{1 - e^{-2x}}}$$

für $x \geq 0$, sonst 0

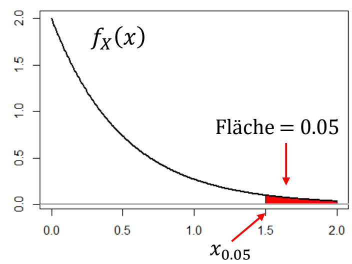
2. **Berechnung des Quantils $x_{0.05}$** $\quad F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha \quad$ mit $\alpha = 0.05$

$$1 - e^{-2 \cdot x_{0.05}} = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$e^{-2 \cdot x_{0.05}} = 0.05$$

$$-2 \cdot x_{0.05} = \ln 0.05$$

$$x_{0.05} = -\frac{1}{2} \cdot \ln 0.05 \approx \underline{\underline{1.5}}$$

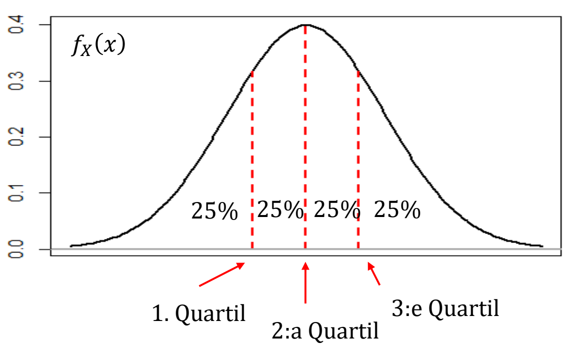


uwe.menzel@matstat.org

17

Quartile

Quartile teilen die Dichtefunktion in vier gleich große Teile.



Zusammenhang mit Quantilen:

1:a Quartil $= x_{0.75}$

2:a Quartil $= x_{0.5}$ (Median)

3:e Quartil $= x_{0.25}$

- Das 2. Quartil ist gleichzeitig der Median (für symmetrische Dichtefunktionen gleichzeitig der Erwartungswert).
- Der Abstand zwischen 1. und 3. Quartil wird IQR genannt ("Inter-Quartile Range"). Dieser kann als (grobes) Maß für die Streuung einer Zufallsvariable benutzt werden.

www.matstat.org

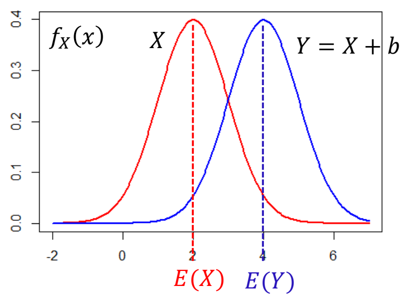
18

Lineare Transformation von Zufallsvariablen

X, Y: Zufallsvariablen
a, b: reelle Zahlen

$\boxed{Y = a \cdot X + b}$ **Lineare Transformation**

a) **spezieller Fall**: $a = 1$ $\quad Y = X + b$ $\quad$ b konstant



- der Erwartungswert wird um b verschoben
- die Varianz bleibt unverändert

Würfel: $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_{X+2} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

www.matstat.org

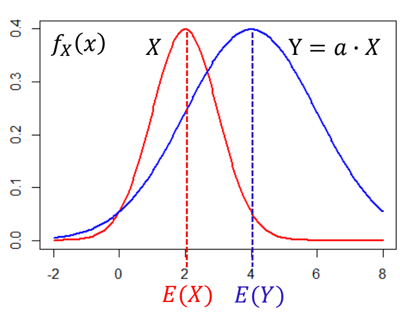
19

Lineare Transformation von Zufallsvariablen

X, Y: Zufallsvariablen
a, b: reelle Zahlen

$\boxed{Y = a \cdot X + b}$ **Lineare Transformation**

b) **spezieller Fall**: $b = 0$ $\quad Y = a \cdot X$ $\quad$ a konstant $=$ Skalierung, (Änderung der Maßeinheit z.B. m → cm auf der x-Achse)



- der Erwartungswert wird verschoben
- die Varianz ändert sich

Würfel:

$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_{5 \cdot X} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

www.matstat.org

20

Rechenregeln für Lineare Transformationen von Z.v.

$$\boxed{\begin{aligned} E(a\cdot X+b) &= a\cdot E(X)+b \\ V(a\cdot X+b) &= a^2\cdot V(X) \\ \mathrm{D}(a\cdot X+b) &= |a|\cdot D(X) \end{aligned}}$$

$Y = a\cdot X + b$ Lineare Transformation

eine Verschiebung um b hat keinen Einfluss auf die Varianz

Beweis (für kontinuierliche Zufallsvariablen):

$$E(a\cdot X+b) = \int (a\cdot x+b)\cdot f_X(x)\,dx = a\cdot \underbrace{\int x\cdot f_X(x)\,dx}_{=E(X)} + b\cdot \underbrace{\int f_X(x)\,dx}_{=1}$$

$$= \underline{\underline{a\cdot E(X)+b}}$$

$$V(a\cdot X+b) = \int [(a\cdot x+b) - (\underbrace{a\cdot\mu+b}_{E(a\cdot X+b)})]^2\cdot f_X(x)\,dx = a^2\cdot\int (x-\mu)^2\cdot f_X(x)\,dx$$

$$\underline{\underline{= a^2\cdot V(X)}}$$

uwe.menzel@matstat.org

21

Standardisierte Zufallsvariablen

X : Zufallsvariable   Seien: $E(X) = \mu$ (Erwartungswert)

$V(X) = \sigma^2$ (Varianz)

$D(X) = \sigma$ (Standardabweichung)

Durch lineare Transformation von X kann eine neue Zufallsvariable Y gebildet werden: Subtraktion des Erwartungswerts von X und Teilen durch die Standardabweichung von X)

$$\boxed{Y = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

dies ist eine Lineare Transformation: $Y = \underbrace{\frac{1}{\sigma}}_{a}\cdot X - \underbrace{\frac{\mu}{\sigma}}_{b}$

www.matstat.org

22

Standardisierte Zufallsvariablen

$$\boxed{Y = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

Erwartungswert und Standardabweichung für *Y* werden:

$$E(Y) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = E\left(\frac{1}{\sigma}\cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\cdot \underbrace{E(X)}_{\mu} - \frac{\mu}{\sigma} = \underline{\underline{0}}$$

$$V(Y) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = V\left(\frac{1}{\sigma}\cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\cdot \underbrace{V(X)}_{\sigma^2} = \underline{\underline{1}}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$ und $D(X) = \sigma$. Die standardisierte Zufallsvariable $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ hat den Erwartungswert 0 und die Standardabweichung 1.

Wichtig!: Dies sagt jedoch noch nichts über die Verteilung von Y aus. Die Zufallsvariable Y hat im Allgemeinen **nicht** die gleiche Verteilung wie X. Mehr dazu später.

www.matstat.org

23