Grundlagen der Mathematischen Statistik

Diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

Diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen

Zufallsvariable (Z.v.):

- Variable welche zufällige Werte annimmt; beschreibt einen Zufallsversuch
- große Buchstaben: X , Y, L usw.
- unbestimmt vor Zufallsversuch

Observation (für eine Z.v.):

- Resultat (Realisation) eines Zufallsversuches
- kleine Buchstaben: k, x, l usw.

Diskrete Z.v.:

- kann nur eine endliche (oder abzählbar unendliche) Anzahl Werte annehmen
- Augenzahl beim Würfel; Anzahl Würfe bevor zweimal hintereinander dieselbe Augenzahl kommt; Anzahl von Kunden in einer Warteschlange; Anzahl der Anwender auf einem Server; Anzahl von Autounfällen pro Jahr usw.

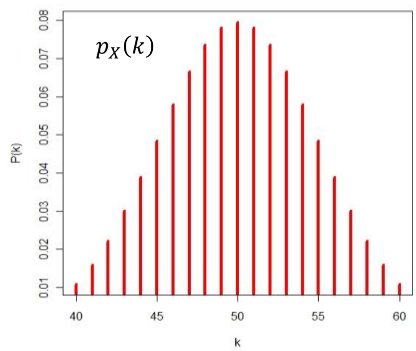
Kontinuierliche Z.v.:

- nicht diskret !
- nimmt reelle Werte an (”unendlich dicht”: zwischen zwei beliebigen reellen Werten gibt es unendlich viele reelle Zahlen)
- Lebensdauer einer Glühbirne ; Gewicht ; Windgeschwindigkeit ; elektrische Spannung ; Konzentration einer Chemikalie ; …

Diskrete Zufallsvariablen

Diskrete Z.v.:

- kann nur eine endliche (oder abzählbar unendliche) Anzahl Werte annehmen
- Augenzahl beim Würfel; Anzahl Würfe bevor zweimal hintereinander dieselbe Augenzahl kommt; Anzahl Kunden in einer Warteschlange; Anzahl User auf einem Server; Anzahl Autounfälle pro Jahr usw.



www.matstat.org

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

- X : diskrete Zufallsvariable (Z.v.)
- k : Realisation (Observation)

Bezeichnung für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert k annimmt:

$$\boxed{P(X = k) \;\; oder \;\; p_X(k)}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion: $P(X = k)$ für jedes k aus Ω_X

Beispiel: Würfel, Zufallsvariable X : Augenzahl für einen Wurf

$$P(X = 4) = p_X(4) = \frac{1}{6}$$

www.matstat.org

Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

... kann auf drei Arten beschrieben werden:

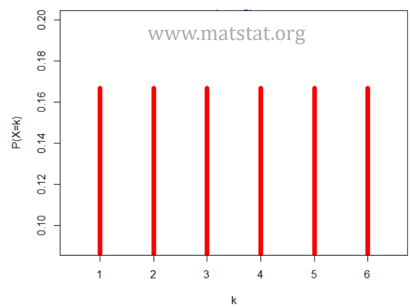
Beispiel: Würfel: $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. **Tabelle**:

k	1	2	3	4	5	6
$p_X(k)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

2. **Formel**: $p_X(k) = 1/6 \qquad k = 1, 2, \dots, 6$

3. **Säulendiagramm:**



Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen

$0 \leq p_X(k) \leq 1$ für alle k (folgt aus Axiom 1)

$\sum_{alla\ k} p_X(k) = 1$ Axiom 2 $P(\Omega) = 1$

$P(A) = \sum_{k \in A} p_X(k)$ Axiom 3 (die Elementarereignisse für verschiedene k müssen unvereinbar sein)

es wird über alle Elementarereignisse, die zum Ereignis A gehören, summiert

Beispiel : Würfel $A = \{2, 4, 6\}$ (gerade Zahl wird gewürfelt)

$$P(A) = \sum_{k=2,4,6} p_X(k) = p_X(2) + p_X(4) + p_X(6) = \frac{3}{6}$$

www.matstat.org

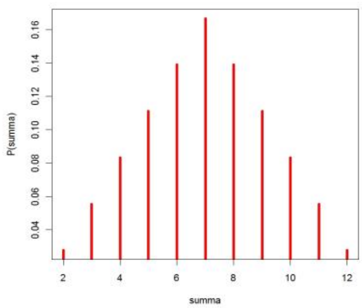
Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen

<u>Beispiel</u> : zwei Würfel ; Zufallsvariable Z = Augensumme $\Omega_Z = \{2, 3, \ldots, 12\}$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_Z(k)$	$^1/_{36}$	$^2/_{36}$	$^3/_{36}$	$^4/_{36}$	$^5/_{36}$	$^6/_{36}$	$^5/_{36}$	$^4/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$

In Vorlesung 1 wurde die Tabelle schon verwendet

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



Haben wir das richtig gemacht ? :

$0 \le p_Z(k) \le 1$ ✓

$$\sum_{k=2}^{12} p_Z(k) = 1$$ ✓

www.matstat.org

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen

<u>Fortsetzung, Beispiel</u> : zwei Würfel

Ereignis A : Summe der Augenzahlen ist eine gerade Zahl

$$P(A) = \sum_{k \in A} p_Z(k) = p_Z(2) + p_Z(4) + \ \ldots + p_Z(12) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Ereignis B : Summe der Augenzahlen ≤ 4

$$P(B) = P(Z \le 4) = p_Z(2) + p_Z(3) + \ p_Z(4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

www.matstat.org

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen

<u>Beispiel 1</u>, diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion

k	1	2	3	4
$p_X(k)$	0.2	0.3	0.4	?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

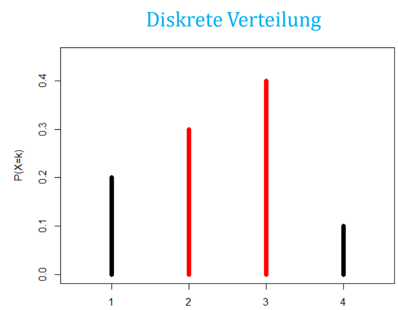
$\Rightarrow$ $p_X(4) = 0.1$ Axiom 2

$P(X \leq 1) = p_X(1) = 0.2$

$P(X > 1) = p_X(2) + p_X(3) + p_X(4) = 0.8$

$P(1 < X \leq 3) = p_X(2) + p_X(3) = 0.7$

Vorsicht!: Die Eins ist **nicht** einbegriffen!
Für diskrete Z.v.. ist es **sehr wichtig, zwischen "<" und "≤" zu unterscheiden!**



$P(1 < X \leq 3)$

www.matstat.org

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsfunktionen

<u>Beispiel 2</u>, diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion

k	1	2	3	4
$p_X(k)$	0.2·c	0.3·c	0.4·c	0.5·c

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$c = ?$

$$\sum_{k=1}^{4} p_X(k) = 1.4 \cdot c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \quad \text{(Axiom 2)}$$

Zusammenfassung: Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

- gibt die Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis einer diskreten Zufallsvariable an
- kann durch Formel, Tabelle oder Säulendiagramm repräsentiert werden

www.matstat.org

Verteilungsfunktionenen für diskrete Zufallsvariablen

Definition Verteilungsfunktion:

- X : Zufallsvariable
- a : reelle Zahl

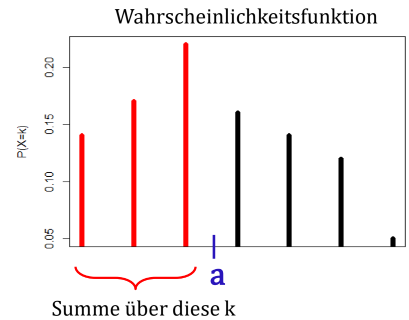
$$\boxed{F_X(a) = P(X \leq a)}$$

Zeichen "$\leq$" wichtig: "kleiner oder gleich a" !

Verteilungsfunktionen können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion berechnet werden:

$$\boxed{F_X(a) = P(X \leq a) = \sum_{k \leq a} p_X(k)}$$

- Summation über alle $p_X(k)$ deren Argument k kleiner oder gleich der reellen Zahl a ist
- (**Anm.:** die Zahl a muss also **nicht** zum Ereignisraum Ω gehören!)
- die Verteilungsfunktionen ist eine kumulative Summe



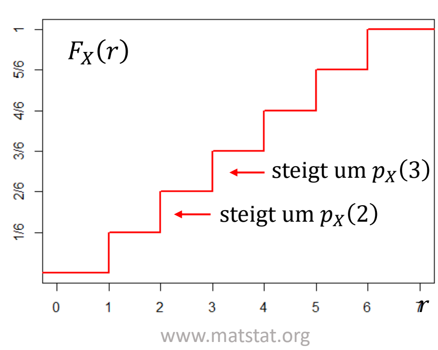
www.matstat.org

Verteilungsfunktionen für diskrete Zufallsvariablen

<u>Beispiel</u> : Würfel

Elem.ereignis	k	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinl.fkt.	$p_X(k)$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$
Verteilungsfkt.	$F_X(k)$	$^1/_6$	$^2/_6$	$^3/_6$	$^4/_6$	$^5/_6$	**1**

Verteilungsfunktionen (engl. **CDF**: **C**umulative **D**istribution **F**unctions) sind **kontinuierliche** Funktionen (definiert für reelle Zahlen). [in der obigen Tabelle nur für ausgewählte Punkte notiert]



$F_X(0.3) = 0$

rechtskontinuierlich:

$F_X(1) = P(X \leq 1) = {^1/_6}$

$F_X(4.5) = {^2/_3}$

$F_X(1000) = 1$

$F_X(a)$ ist 1 für alle Zahlen a, die größer oder gleich dem größten Elementarereignis sind

Verteilungsfunktion, Eigenschaften

$0 \le F_X(t) \le 1$ — $F_X(t)$ ist ja selbst eine Wahrsch.: $F_X(a) = P(X \le a)$; $F_X(t)$ muss also zwischen 0 und 1 sein (Axiom 1)

$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ — "$F_X(-\infty) = 0$" : F_X ist Null "links" vom kleinsten Wert in Ω

$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$ — alle Elementarereignisse müssen kleiner als ∞ sein, also "$P(X \le \infty) = 1$".

$t_2 > t_1 \; \rightarrow \; F_X(t_2) \ge F_X(t_1)$ — F wächst monoton (nimmt nicht ab). Es werden ja nur positive Zahlen $p_x(t)$ addiert.

Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Hilfe der Verteilungsfunktion
(Beispiel Würfel):

$$F_X(3) = \underbrace{p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)}$$

$$F_X(4) = \quad F_X(3) \quad + p_X(4)$$

$\Rightarrow$ $p_X(4) = F_X(4) - F_X(3)$

$$\boxed{p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)}$$

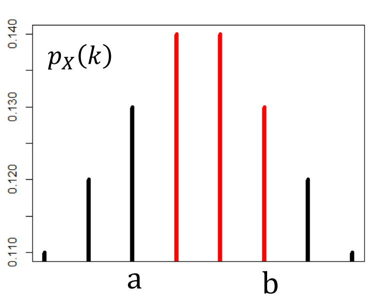
$F_X(k)$ steigt bei k um $p_X(k)$, siehe Bild oben
F_X ist oft tabelliert → Möglichkeit zur Berechnung von $p_X(k)$

Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeit für Ereignisse

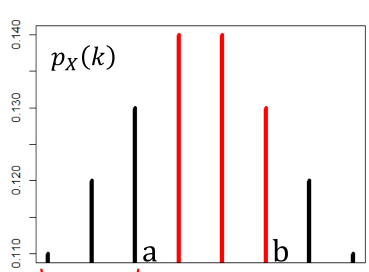
X : diskrete Zufallsvariable ; F_X : dessen Verteilungsfunktion

korrekte Anwendung der Zeichen $\le$ sehr wichtig!

$\boxed{P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)}$ also $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$



$\underbrace{\qquad}_{a < X \le b}$



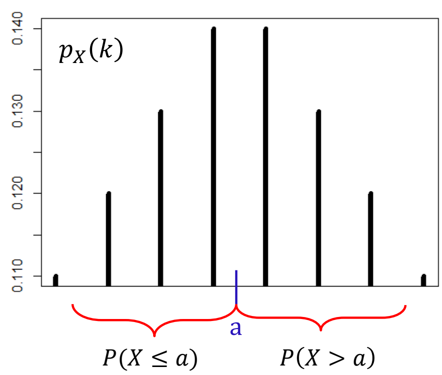
$\underbrace{\qquad}_{P(X \le a)}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{P(X \le b)}$

www.matstat.org

Verteilungsfunktion und Komplementsatz

$\boxed{P(X > a) = 1 - P(X \leq a)}$ $\quad P(X > a) = 1 - F_X(a)$

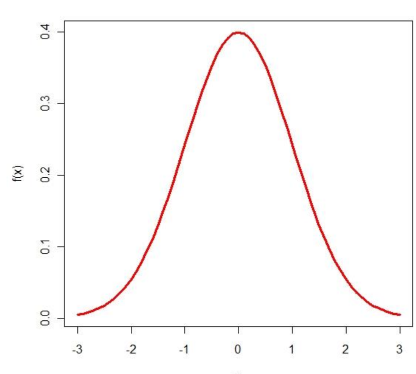


www.matstat.org

Kontinuierliche Zufallsvariablen

Kontinuierliche Zufallsvariable:

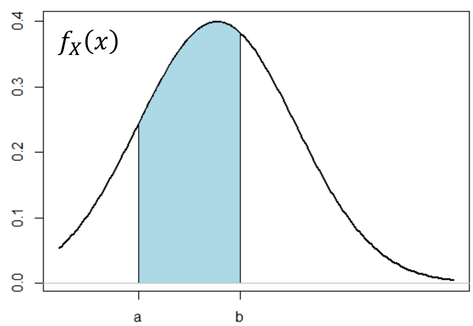
- nicht diskret !
- nimmt reelle Werte an (”unendlich dicht”: zwischen zwei beliebigen reellen Werten gibt es unendlich viele reelle Zahlen)
- Lebensdauer einer Glühbirne ; Gewicht ; Windgeschwindigkeit ; elektrische Spannung ; Konzentration einer Chemikalie ; ...



Dichtefunktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X kann mit Hilfe einer Dichtefunktion $f_X(x)$ beschrieben werden.

- X : kontinuierliche Zufallsvariable (Z.v..)
- x : Argument

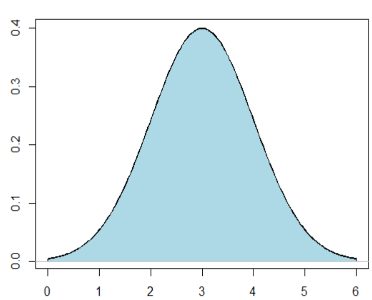


Definition der Dichtefunktion:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Z. v. X zwischen den reellen Werte a und b landet soll gleich der Fläche unter der Dichtefunktion zwischen a und b sein:

$$\boxed{P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx}$$

$=$ W., dass X im Intervall (a, b) landet

Dichtefunktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen



Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion muss 1 sein (Axiom 2: $P(\Omega) = 1$)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1}$$ **Normierung**

dies ist ja die W., dass X zwischen -∞ und +∞ landet - ein Ereignis, welches mit Sicherheit eintreffen muss!

Anmerkungen:

- Wenn der Ereignisraum Ω auf ein gewisses Intervall (u, v) begrenzt ist, können die Integrationsgrenzen in der obigen Formel auf diese Werte gesetzt werden.
- Eine Dichtefunktion kann nur die W. angeben, dass X zwischen zwei Werten landet, dagegen hat eine einzelne reelle Zahl immer die **Wahrscheinlichkeit Null** !

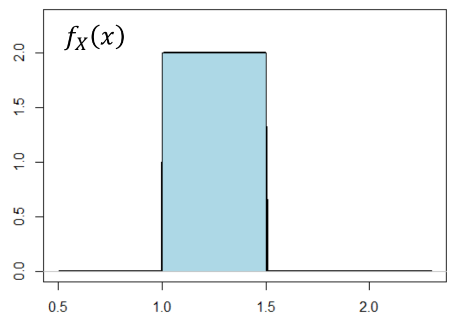
$\cancel{P(X = a)}$ gibt es nicht für kontinuierliche Zufallsvariablen!

Dichtefunktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Zur Erinnerung: eine Wahrscheinlichkeitsfunktion für eine diskrete Z.v.. muss folgende Bedingung erfüllen: $0 \le p_X(k) \le 1$

Im Gegensatz dazu kann eine Dichtefunktion Werte annehmen, die größer als 1 sind, solange die Gesamtfläche unter der Kurve Eins ist:

Beispiel: Gleichförmige kontinuierliche Verteilung im Intervalll $(1, 1.5)$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{1.5} 2\,dx = [2x]_1^{1.5} = \underline{\underline{1}}$$

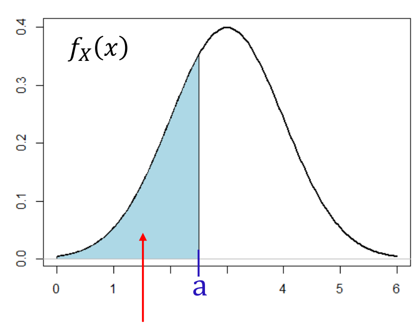
(viel) einfacher: $2 \cdot 0.5 = 1$

Verteilungsfunktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

X : kontinuierliche Zufallsvariable ; F_X : dessen Verteilungsfunktion

$$\boxed{F_X(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx}$$

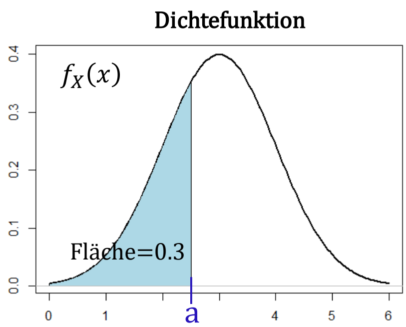
Dadurch wird für jeden Wert von a eine neue Funktion definiert: Funktionswert = Fläche unter der Dichtefunktionen "links" von a.

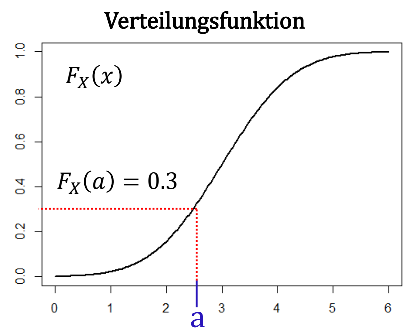


$F_X(a)$ entspricht der blau markierten Fläche

Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$$





uwe.menzel@matstat.org

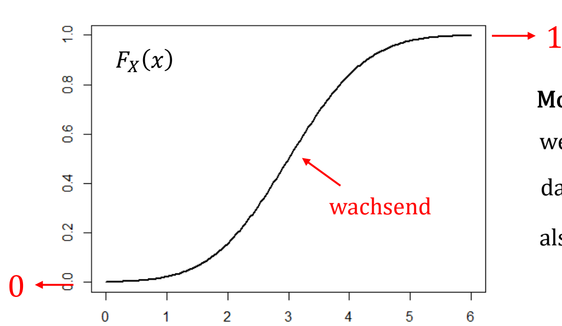
Eigenschaften von Verteilungsfunktionen

X : kontinuierliche Zufallsvariable ; F_X : dessen Verteilungsfunktion

$\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$ $\quad$ $"F_X(-\infty) = P(X \leq -\infty)"$ $\quad$ (letztere Notation ist nicht korrekt)

$\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$ $\quad$ $"F_X(\infty) = P(X \leq \infty)"$ $\quad$ (letztere Notation ist nicht korrekt)

Die Verteilungsfunktion wächst monoton:



Monotonie:

wenn $a_1 < a_2$

dann $P(X \leq a_1) \leq P(X \leq a_2)$

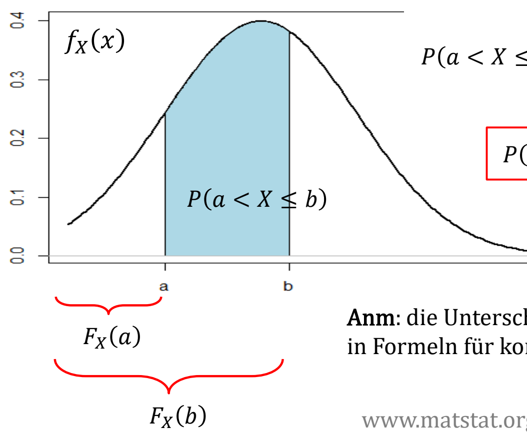
also $F_X(a_1) \leq F_X(a_2)$

www.matstat.org

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verteilungsfunktionen

X : kontinuierliche Zufallsvariable ; F_X : dessen Verteilungsfunktion

Zur Erinnerung: die Wahrscheinlichkeit, dass die Z.v. X zwischen den reellen Werten a und b landet ist gleich der Fläche unter der Dichtefunktionen zwischen a und b:



$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\boxed{P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Anm: die Unterscheidung zwischen "≤" und "<" ist in Formeln für kontinuierliche Z.v.. **nicht wichtig**!

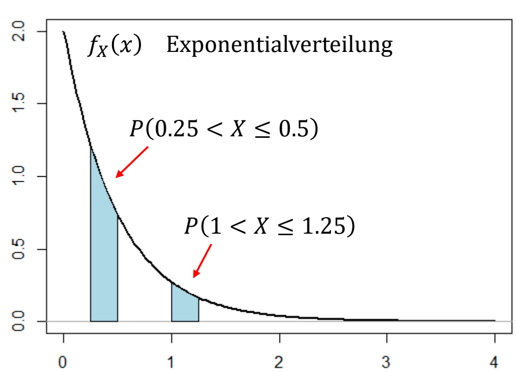
www.matstat.org

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verteilungsfunktionen

<u>Beispiel</u>:

$$f_X(x) = \begin{Bmatrix} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{Bmatrix}$$

Exponentialverteilung



www.matstat.org

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verteilungsfunktionen

Beispiel , Fortsetzung :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Stimmt Normierung?: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$??

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} 2 \cdot e^{-2x}\, dx = \left[2 \cdot \frac{1}{-2} \cdot e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = \left[e^{-2x}\right]_{\infty}^{0} = \underline{\underline{1}}$$

✓

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verteilungsfunktionen

Beispiel , Fortsetzung:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

b) Berechnung der Verteilungsfunktion:

$a > 0$ gefordert!

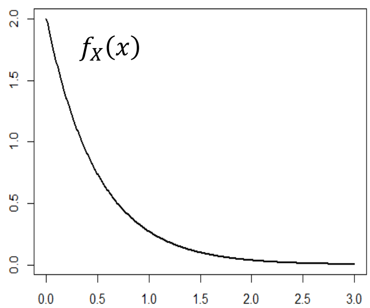
$$F_X(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int\limits_{0}^{a} 2 \cdot e^{-2x}\, dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^a = \left[e^{-2x}\right]_a^0 = \underline{\underline{1 - e^{-2a}}}$$

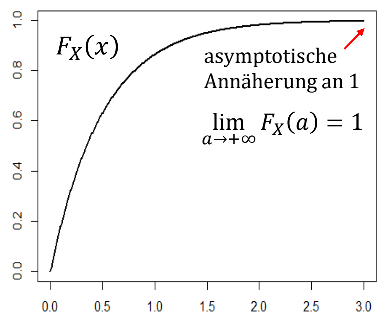
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verteilungsfunktionen

<u>Beispiel</u> , Fortsetzung:

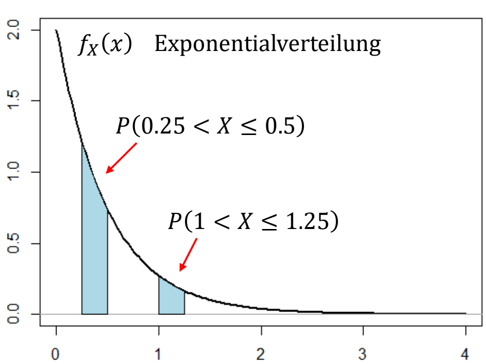
$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$





Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verteilungsfunktionen

<u>Beispiel</u> , Fortsetzung: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



$$P(0.25 < X \leq 0.5) = F_X(0.5) - F_X(0.25)$$
$$= (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-0.5})$$
$$= e^{-0.5} - e^{-1} = \underline{\underline{0.239}}$$

$$P(1 < X \leq 1.25) = F_X(1.25) - F_X(1)$$
$$= (1 - e^{-2.5}) - (1 - e^{-2})$$
$$= e^{-2} - e^{-2.5} = \underline{\underline{0.053}}$$

uwe.menzel@matstat.org

Der Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \qquad \text{Ableitung } \frac{\partial}{\partial a}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a} F_X(a) = f_X(a)}$$

Ableitung eines Parameterintegrals → Leibnizregel:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{u(a)}^{o(a)} h(x)\, dx = h[o(a)] \cdot \dot{o}(a) - h[u(a)] \cdot \dot{u}(a)$$

(wenn der Integrand nicht explizit von a abhängt)

Beispiel Exponentialverteilung , Fortsetzung:

$$F_X(a) = 1 - e^{-2a} \quad \text{für } a > 0$$

$$f_X(a) = \frac{\partial}{\partial a} F_X(a) = \frac{\partial}{\partial a}(1 - e^{-2a}) = 2 \cdot e^{2a} \quad ✓ \quad (a > 0)$$

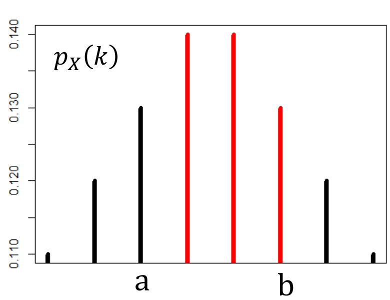
www.matstat.org

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen

Diskrete Z.v.

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

sehr wichtig!

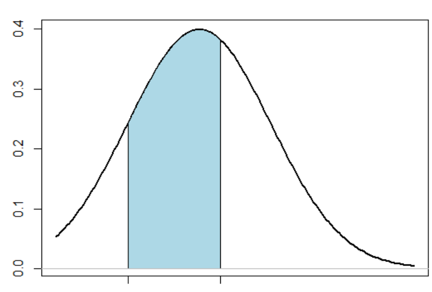


$a < X \leq$ b

Kontinuierliche Z.v.

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

spielt keine Rolle!



$F_X(a)$

$F_X(b)$

www.matstat.org

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für kontinuierliche Zufallsvariablen

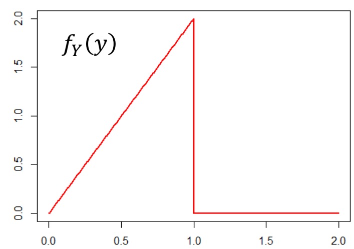
Beispiel: Dichtefunktion $f_Y(y) = \left\{ \begin{matrix} c \cdot y & 0 < y \leq 1 \\ 0 & sonst \end{matrix} \right\}$ c = konstant

a) Berechne die Konstante c

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = \int_0^1 c \cdot y\, dy = c \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot y^2\right]_0^1 = c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{c = 2}}$$

b) Skizziere die Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \left\{ \begin{matrix} 2 \cdot y & 0 < y \leq 1 \\ 0 & sonst \end{matrix} \right\}$$



Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für kontinuierliche Zufallsvariablen

c) Berechne die Verteilungsfunktion für $f_Y(y) = \left\{ \begin{matrix} 2 \cdot y & 0 < y \leq 1 \\ 0 & sonst \end{matrix} \right\}$

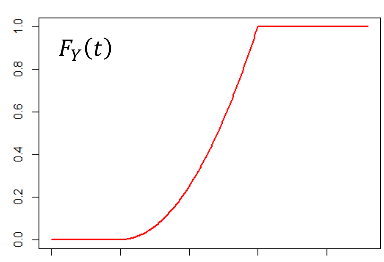
$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)dy = \int_0^t 2 \cdot y\, dy = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot y^2\right]_0^t = t^2 \qquad \text{für } 0 < t \leq 1$$

$F_Y(t) = 0$ für $t < 0$ (siehe Bild oben)

$F_Y(t) = 1$ für $t \geq 1$

$\Rightarrow$

$$\boxed{F_Y(t) = \left\{ \begin{matrix} 0 & t < 0 \\ t^2 & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{matrix} \right\}}$$



Vergleich von diskreten und kontinuierlichen Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariable	Kontinuierliche Zufallsvariable
Wahrscheinlichkeitsfunktion	Dichtefunktion
$P(X=k)=p_X(k)$	Wahrscheinlichkeit ist Null für einen einzelnen reellen Wert
$0 \leq p_X(k) \leq 1$	$f_X(x)$ kann größer als 1 werden
$\sum_{k\in\Omega} p_X(k)=1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=1$
$P(A)=\sum_{k\in A} p_X(k)$	$P(a<X\leq b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$

uwe.menzel@matstat.org

Vergleich von diskreten und kontinuierlichen Z.v.

Diskrete Zufallsvariable	Kontinuierliche Zufallsvariable
Verteilungsfunktion	Verteilungsfunktion
$F_X(a)=P(X\leq a)$	$F_X(a)=P(X\leq a)$
$F_X(a)=\sum_{k\leq a} p_X(k)$	$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$
$P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$	$P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$
$p_X(k)=F_X(k)-F_X(k-1)$	$f_X(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x)$
$P(X>a)=1-F_X(a)$	$P(X>a)=1-F_X(a)$
$F_X(x)$ monoton wachsend von 0 nach 1	$F_X(x)$ monotont wachsend von 0 nach 1

www.matstat.org