Grundlagen der Mathematischen Statistik

Grundbegriffe, Axiome, Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängige Ereignisse, Totale Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes

Uwe Menzel, 2018

uwe.menzel@matstat.org

www.matstat.org

1

Zufallsversuch

Zufallsversuch: Versuch mit ungewissem, unkontrollierbarem Ausgang:

- Würfelwurf
- Ziehen einer Kugel aus einer Urne (mit Kugeln verschiedener Färbung)
- Münzwurf (”Kopf” oder ”Zahl”)
- systolischer Blutdruck einer zufällig ausgewählten Person
- Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Glühlampe
- radioaktiver Zerfall: Anzahl der Emissionen in einer gewissen Minute
- Messung (!) von Durchmesser, Temperatur, Konzentration, …

Elementarereignis

Das ”kleinstmögliche” Resultat eines Zufallsversuchs wird Elementarereignis (***ω***) genannt:

- Augenzahl nach Würfeln: $\omega = \{1\}$
- Roulette: $\omega = \{24\}$
- Münzwurf: $\omega = \{Kopf\}$
- radioaktiver Zerfall, Signale in einer gewissen Minute: $\omega = \{109\}$
- Wurf mit zwei Würfeln: $\omega = \{(1, 5)\}$
- gemessene Lebensdauer einer Glühlampe: $\omega = 1245.6$ Stunden
- Meinungsumfrage: ein zufällig ausgewählter Wähler stimmt für Partei A

2

Ereignisraum (Ergebnismenge)

Die Menge aller möglichen Elementarereignisse eines Zufallsversuches heißt Ereignisraum (Ω):

- Augenzahl beim Würfeln: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Roulette: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 36\}$
- Münzwurf: $\Omega = \{0, 1\}$ (0 = Kopf; 1= Zahl)
- Wurf mit zwei Würfeln : $\Omega = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3)\ , \ldots\ , (6,6)\}$
- Lebensdauer einer Glühlampe: $\Omega = \{0, +\infty\}$ (?)

Ereignis

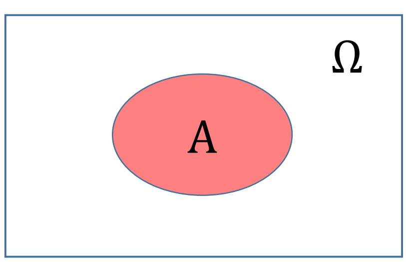
Ein Ereignis ist eine Ansammlung von Elementarereignissen (eine Teilmenge des Ereignisraumes):

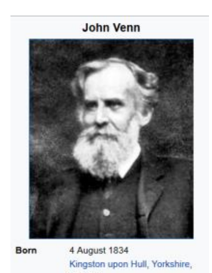
- Würfel: $A = \{2, 4, 6\}$ (gerade Augenzahl)
- (Ereignis A trifft ein wenn ein zu A gehörendes Elementarereignis eintritt)
- Würfel: $B = \{1, 2, 3\}$ (Augenzahl ≤ 4)
- Wurf zweier Würfel: $A = \{(1,1),\ (1,2,),\ (2,1)\}$ (Summe Augenzahlen ≤ 3)
- radioaktiver Zerfall: : $C = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots, 10\}$ (höchstens 10 Zerfälle in einer gewählten Minute)

3

Venn-Diagramm

Der Ereignisraum und Ereignisse können mit Hilfe eines Venn-Diagramms illustriert werden:



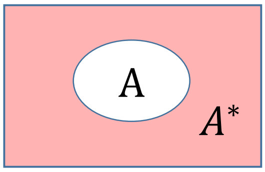


- **Rechteck**: gesamter Ereignisraum (Ω)
- **Ellipse**: ein Ereignis (A; Teil des Ereignisraumes)

4

Relation von Ereignissen

Komplementäres Ereignis:

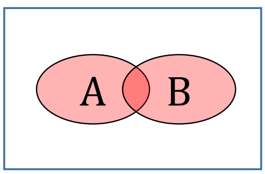


Beispiel (Würfel) :
$A = \{2, 4, 6\}$ (gerade Zahl)

komplementäres Ereignis:
$A^* = \{1, 3, 5\}$ (ungerade Zahl)

Ereignis und komplementäres Ereignis "überdecken" den Ereignisraum vollständig, denn entweder muss A oder A* eintreffen!

Union von Ereignissen:



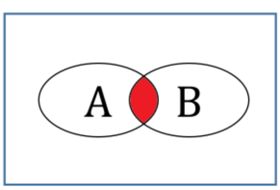
$A = \{2, 4, 6\}$
$\mathrm{B} = \{1, 2, 3\}$

Union:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
"A oder B oder beide" (letzteres z.B. mit Würfeln der 2) treffen ein (nicht dieselbe Bedeutung wie in der Alltagssprache!)

5

Zusammengesetzte Ereignisse

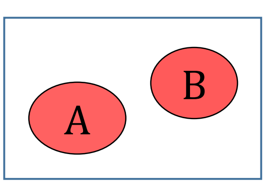
Schnittereignis:



$A = \{2, 4, 6\}$
$\mathrm{B} = \{1, 2, 3\}$

Schnitt:
$A \cap B = \{2\}$
"sowohl A als auch B treffen als Ergebnis des Zufallsversuches ein"

Disjunkte (unvereinbare) Ereignisse:

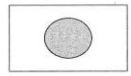
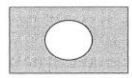
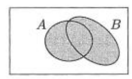
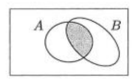
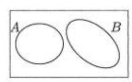


$A = \{1, 6\}$
$\mathrm{B} = \{4, 5\}$

Schnitt ist leer:
$A \cap B = \emptyset$
die Ereignisse haben keine gemeinsamen Elementar-ereignisse

6

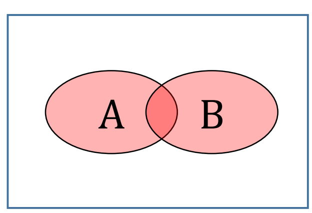
Vergleich mit Begriffen aus der Mengenlehre

Ereignisraum		Grundmenge
Ereignis A trifft ein		Teilmenge A
komplementäres Ereignis A^* (A trifft **nicht** ein)		Komplementmenge A^*
Union der Ereignisse A und B (A oder B oder beide treffen ein)		Vereinigungsmenge $A \cup B$
Schnitt der Ereignisse A und B : $A \cap B$ (A und B treffen ein)		Schnittmenge $A \cap B$
Ereignisse A und B disjunkt (A und B können nicht gleichzeitig eintreffen)		Mengen A und B disjunkt (keine gemeinsamen Elemente: $A \cap B = \emptyset$)

www.matstat.org

7

De Morgansche Gesetze



$(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$

$(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$

Leicht zu überprüfen durch Finden der entsprechenden Regionen im Venn-Diagramm

Die De Morganschen Gesetze gelten auch für mehr als zwei Ereignisse, z. B.:

$(A \cup B \cup C)^* = A^* \cap B^* \cap C^*$

www.matstat.org

8

Die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

$\Omega = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$ Ereignisraum, mit m Elementarereignissen

$P(u_i) = {}^1/_m$ alle Elementarereignisse u_i seien gleich wahrscheinlich!

m = Anzahl der möglichen Elementarereignisse
g = Anzahl der Elementarereignisse in Ereignis A (= Anzahl der "günstigen" Elementarereignisse)

Die Wahrscheinlichkeit (W.) für das Ereignis A wird mit $\boldsymbol{P(A)}$ bezeichnet:

$$\boxed{P(A) = \frac{g}{m}}$$ klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Beispiel 1**:** Würfel, suche W. dass die Augenzahl gerade ist:

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{g}{m} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

www.matstat.org

9

Die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Begriff Zufallsvariable:

- Eine Zufallsvariable (Z.v.) ist eine Größe, die vor dem Zufallsexperiment unbestimmt ist und erst danach einen Wert zugewiesen bekommt.

Beispiel 2: Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen:

Zufallsvariable X: Augenzahl für Würfel 1
Zufallsvariable Y: Augenzahl für Würfel 2

Ereignis A sei: $X + Y \leq 4$ (Summe der Augenzahlen ist ≤ 4)

Suche:
$P(A) = P(X + Y \leq 4)$ (W. dass die Summe der Augenzahlen ≤ 4 ist)

Wir brauchen **g** (die Anzahl der "günstigen" Elementarereignisse) und **m** (die Anzahl "möglichen" Elementarereignisse)

www.matstat.org

10

Die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Fortsetzung von Bsp. 2: zwei Würfel werden geworfen. Suche $P(A) = P(X + Y \leq 4)$:

Wir brauchen **g** (die Anzahl der "günstigen" Elementarereignisse) und **m** (die Anzahl der "möglichen" Elementarereignisse).
Die Tabelle zeigt die Summe $X + Y$ für alle Werte von X und Y:

Y\X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Würfel 1 (X)

Würfel 2 (Y)

g = 6 (grün)
m = 36 (alle Felder)

Lösung: $P(A) = P(X + Y \leq 4) = \frac{g}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

www.matstat.org

11

Die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Beispiel 3: Eine Urne beinhaltet 100 Kugeln; davon 90 weiße und 10 blaue.

Zufallsversuch: ziehe eine Kugel und registriere die Farbe.
Zufallsvariable X: die Farbe der gezogenen Kugel.
Ereignis B sei: die gezogene Kugel ist blau.
Ereignis W sei: die gezogene Kugel ist weiß.
$\boldsymbol{P(B)}$: W., dass Ereignis B eintrifft, d.h. dass die gezogene Kugel blau ist.
$\boldsymbol{P(W)}$: W., dass Ereignis W eintrifft, d.h. dass die gezogene Kugel weiß ist.

Lösung:

$$P(B) = P(X = blau) = \frac{g}{m} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\%$$

$$P(W) = P(X = weiß) = \frac{g}{m} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} = 90\%$$

Anmerkung: die Summe beider Wahrscheinlichkeiten ist 1, denn:

- beide Ereignisse schließen einander aus
- eines der beiden Ereignisse **muss** eintreffen

$P(B) + P(W) = 1$

www.matstat.org

12

Kombinatorik*

In Bezug auf die klassische Definition der W. hatten wir bisher nur Beispiele, bei denen g und m leicht zu errechnen waren, weil die zu bestimmenden Anzahlen recht klein waren. Wirklich kompliziert wird es erst, wenn g und m (viel) größer werden. Dazu braucht man eventuell ein bißchen **Kombinatorik**.

1. Permutationen
2. Das Multiplikationsprinzip
3. Ziehung mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Ordnung
4. Ziehung ohne Zurücklegen, jedoch mit Berücksichtigung der Ordnung
5. Ziehung ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Ordnung

1.) Permutationen

Auf wie viele Arten kann man k verschiedene Elemente anordnen ?

<u>Beispiel</u>: nummerierte Kugeln 1 2 3

$k = 2$

$$\left.\begin{array}{l} 1,2 \\ 2,1 \end{array}\right\} 1 \cdot 2 = 2 \text{ Möglichkeiten}$$

$k = 3$

$$\left.\begin{array}{l} 1,2,3 \\ 1,3,2 \\ 2,1,3 \\ 2,3,1 \\ 3,1,2 \\ 3,2,1 \end{array}\right\} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ Möglichkeiten}$$

Allgemein: k Elemente können auf $k!$ ("k Fakultät") verschiedene Arten angeordnet werden.

$$M = k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$$

<u>Anmerkung</u>: Eine genauere Terminologie dafür ist "Anzahl der Permutationen von k Elementen aus k". In der Vorlesung werden wir nur den Ausdruck "Permutationen" benutzen.

2.) Das Multiplikationsprinzip

Multiplikationsprinzip:

Wenn Schritt 1 auf n_1 Arten ausgeführt werden kann und Schritt 2 auf n_2 Arten, dann gibt es $n_1 \cdot n_2$ Arten, beide Schritte zu kombinieren. Verallgemeinerung auf 3 Schritte ergibt $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ usw.

Schritt 1 n_1 Möglichkeiten
Schritt 2 n_2 Möglichkeiten
Schritt 3 n_3 Möglichkeiten
...
...
Schritt k n_k Möglichkeiten

Anzahl der kombinerten Möglichkeiten:

$\mathrm{M} = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$

Beispiel 1: 2 Würfel

$\left.\begin{array}{l} n_1 = 6 \\ n_2 = 6 \end{array}\right\} \quad M = 6 \cdot 6 = \underline{\underline{36}}$

(vgl. mit Tabelle oben!)

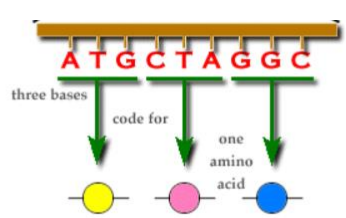
Das Multiplikationsprinzip

Beispiel 2: Schwedische Autonummer

26 Buchstaben
10 Ziffern

$$\mathrm{M} = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^3 = \underline{\underline{17.576.000}}$$

Beispiel 3: DNA-Triplett Basen: A, C, G, T



$$\underbrace{\boxed{?}\ n_1 = 4 \quad \boxed{?}\ n_2 = 4 \quad \boxed{?}\ n_3 = 4}_{\mathrm{M} = 4^3 = \underline{\underline{64}}}$$

Ein DNA-Triplett kann theoretisch 64 verschiedene Aminosäuren kodieren. (Es gibt jedoch nur 20 verschiedene Aminosäuren.)

Das Multiplikationsprinzip

Beispiel 4: Wie viele vierstellige Dezimalzahlen gibt es ?

$$\underbrace{\boxed{?}\; n_1 = 10 \quad \boxed{?}\; n_2 = 10 \quad \boxed{?}\; n_3 = 10 \quad \boxed{?}\; n_4 = 10}_{M = 10^4 = 10.000}$$

Dies ist ein Spezialfall des Multiplikationsprinzips, bei dem die Anzahl der Wahlmöglichkeiten (n) in jeder Kategorie gleich ist. Die Anzahl der kombinierten Wahlmöglichkeiten wird dann

$$\boxed{\mathbf{M} = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}}$$

www.matstat.org

17

Was haben wir bisher vorausgesetzt ?

In allen bisherigen Beispielen zur Kombinatorik haben wir angenommen, dass

- Elemente wiederholt werden können, z. B. kann die Ziffer 1215 vorkommen (bei der die 1 zweimal auftaucht)
- die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielt, d.h. Anordnungen werden als verschieden betrachtet, wenn die Elemente in anderer Reihenfolge vorkommen, z.B. wurden die Ereignisse $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 3, 2\}$ als verschieden angesehen.

Wir werden nun mit Hilfe eines Urnenmodelles untersuchen, wie groß die Anzahl der Möglichkeiten wird wenn:

1. Elemente wiederholt werden dürfen und die Reihenfolge zählt, wie bei dem Dezimalzahlenbeispiel ("Ziehung **mit** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge")
2. Elemente **nicht** wiederholt werden dürfen, jedoch die Reihenfolge zählt ("Ziehung **ohne** Zurücklegen, aber **mit** Berücksichtigung der Ordnung")
3. Elemente **nicht** wiederholt werden dürfen und die Reihenfolge **nicht** zählt (" Ziehung **ohne** Zurücklegen und **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge")

www.matstat.org

18

3.) Ziehung mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Wir haben eine Urne mit n nummerierten Kugeln.

Zufallsversuch:

- ziehe eine Kugel, lege die Kugel zurück
- ziehe eine zweite Kugel, lege die Kugel zurück
- usw.
- ziehe insgesamt k Kugeln

Frage: wie viele verschiedene Zifferkombinationen kann man auf diese Weise erhalten, wenn außerdem die Reihenfolge der Zahlen auf den Kugeln zählt ?

Lösung:
"mit Zurücklegen" bedeutet, dass wir bei jeder Ziehung konstant n Auswahlmöglichkeiten (Ziffern) haben. Wenn wir insgesamt k Kugeln ziehen, wird also die gesamte Anzahl verschiedener Zifferkombinationen:

$$\boxed{\mathbf{M} = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}} \quad \text{(nach dem Multiplikationsprinzip)}$$

Sei $n = 9$ und $k = 3 \rightarrow$ mögliche Zifferkombinationen sind z. B.:
112; 113; 123; 321; 478; 444; 978; 789; ...

also: Die Ziffern dürfen sich wiederholen, außerdem zählt die Reihenfolge, d.h. 978 und 789 zählen als zwei unterschiedliche Ereignisse.

19

4.) Ziehung ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Zufallsversuch:

- ziehe eine Kugel, ohne Zurücklegen
- ziehe eine zweite Kugel, ohne Zurücklegen,
- usw.
- ziehe insgesamt k Kugeln (ohne je eine Kugel zurückzulegen)

Frage: Wie viele verschiedene Zifferkombinationen kann man auf diese Weise erhalten, wenn die Reihenfolge nach wie vor zählt?

Lösung:
"ohne Zurücklegen" bedeutet, dass Ziffern nicht wiederholt werden können, d.h. bei der 1. Ziehung hat man noch n Auswahlmöglichkeiten; bei der 2. Ziehung nur noch $(n-1)$ Möglichkeiten, bei der 3. Ziehung nur noch $(n-2)$ Möglichkeiten usw. Die Anzahl von Zifferkombinationen wird somit:

$$\boxed{\mathbf{M} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \cdot \ldots \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}}$$

Sei $n = 9$ und $k = 3 \rightarrow$ mögliche Zifferkombinationen sind nun nur noch (durchgestrichene Ziffern können nicht mehr vorkommen!):
~~112~~; ~~113~~; 123; 321; 478; ~~444~~; 978; 789; ...

also: die Reihenfolge zählt immer noch, d.h. 978 und 789 zählen als verschiedene Ereignisse

20

5.) Ziehung ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Zufallsversuch:
- ziehe eine Kugel, ohne Zurücklegen
- ziehe eine zweite Kugel, ohne Zurücklegen
- usw.
- ziehe insgesamt k Kugeln (ohne je eine Kugel zurückzulegen)

Frage: Wie viele verschiedene Zifferkombinationen kann man auf diese Weise erhalten, wenn die Reihenfolge nicht zählt (z. B. wenn die Kugeln hinterher sowieso nach Ziffern sortiert werden)?

Lösung:
Ziffern dürfen sich nicht wiederholen – wie oben. Darüber hinaus müssen jedoch alle Zifferkombinationen aussortiert werden, die sich nur durch die Ziffernfolge unterscheiden – dies sind genau $k!$ für jeden Satz von k verschiedenen Ziffern. Wir müssen daher den vorherigen Ausdruck noch durch $k!$ teilen:

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$ Binomialkoeffizient

Sei $n = 9$ und $k = 3 \rightarrow$ mögliche Zifferkombinationen sind nun nur noch (durchgestrichene Ziffern können nicht mehr vorkommen!):
~~112~~; ~~113~~; 123; ~~321~~; 478; ~~444~~; 978; ~~789~~; …

21

Ziehung ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Beispiel: Ziehung ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung), ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $n = 49$; $k = 6$ (" Lotto 6 aus 49")

$$\mathrm{M} = \binom{n}{k} = \binom{49}{6} = 13.983.816$$

Es gibt also 13.983.816 mögliche Ergebnisse bei der Ziehung der Lottozahlen. Kauft man 1 Los, ist also die W. zu gewinnen nach der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit:

$$P(6\ Richtige) = \frac{g}{m} = \frac{1}{13983816} = 7.151124 \cdot 10^{-8}$$

22

Noch ein Beispiel

Eine fünfstellige Zufallszahl wird gezogen (00000; 00001; 00003; … ; 99999).

a) Wie groß ist die W., dass diese Zahl nur Nullen und Einsen enthält?
b) Wie groß ist die W., dass alle Ziffern unterschiedlich sind?

Lösung: Alle "gezogenen" Zahlen können als gleich wahrscheinlich angesehen werden. Wir können also die klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition anwenden: $P(A) = \frac{g}{m}$

Die Anzahl der möglichen Elementarereignisse ist: $\mathrm{m} = n^k = 10^5$, denn wir wählen 5 Mal und jedes Mal zwischen 10 Ziffern ($n = 10$ und $k = 5$). (Die Ziffern können wiederholt werden und die Reihenfolge zählt.)

a) Wir haben 2 günstige Möglichkeiten (0 und 1) für jede Ziffer, bei 5 Ziffern insgesamt. Die Anzahl der günstigen Elementarereignisse ist also $g = n^k = 2^5$. Damit wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl nur Nullen und Einsen enthält: $P(A) = \frac{g}{m} = \frac{2^5}{10^5} = 0.00032$

b) Wir ziehen 5 Ziffern. Zuerst wählen wir zwischen 10 Ziffern, dann nur noch zwischen 9 (die erste darf ja nicht mehr vorkommen), dann zwischen 8, usw. Die Anzahl der günstigen Elementarereignisse wird also $g = n \cdot (n-1) \cdot \ \dots \cdot (n-k+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.
Die W. dass alle Ziffern ungleich sind, wird damit $P(A) = \frac{g}{m} = \frac{30240}{10^5} = 0.3024$

23

Urnenmodell, Zusammenfassung

- n nummerierte Kugeln
- k Kugeln werden gezogen

Annahmen	Anzahl der Möglichkeiten	Beispiel
mit Zürücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge	$\mathbf{M} = \boldsymbol{n^k}$	Kombinationsschloss
ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge	$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$	siehe obiges Beispiel (ungleiche Ziffern)
ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$\boldsymbol{M} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$	Lotto

www.matstat.org

24

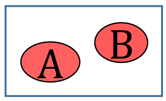
Die Axiome Kolmogorows

A: Ereignis
$P(A)$: Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintrifft

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ wenn A, B disjunkt

Axiom 3 gilt auch für mehr als 2 Ereignisse

Axiom 3:



$A \cap B = \emptyset$

Beispiel: Axiom 3, Würfel $A = \{1, 2\}$
$B = \{5, 6\}$ (A und B sind disjunkt)

$A \cup B = \{1, 2, 5, 6\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{g}{m} = \frac{4}{6}$

$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{2}{6}$ $P(B) = \frac{g}{m} = \frac{2}{6}$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ✓

www.matstat.org

25

Der Komplementsatz

Axiom 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ wenn $A \cap B = \emptyset$ (A, B disjunkt)

Sei $B = A^*$ (das Axiom gilt ja allgemein, also für alle denkbaren Ereignisse B)

$P(A \cup A^*) = P(A) + P(A^*)$ aufgrund von Axiom 3, A und A^* disjunkt

$P(\Omega) = P(A) + P(A^*)$ weil $\Omega = A \cup A^*$

$1 = P(A) + P(A^*)$ aufgrund von Axiom 2

$\boxed{P(A^*) = 1 - P(A)}$ Komplementsatz (wird sehr oft angewendet!)

Ex1, Würfel: A: eine 1 kommt $P(Eins) = 1 - P(keine\ Eins)$
A*: keine 1 kommt $\frac{1}{6} = 1 - \frac{5}{6}$

Ex2, Glühlampe: $P(Lebensdauer\ > 1000\ h) = 1 - P(Lebensdauer\ \leq 1000\ h)$

$\leq 1000\ h$ $> 1000\ h$

1000 h

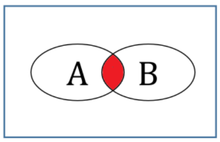
Lebensdauer entweder $>$ 1000 oder $\leq$ 1000 , einer dieser beiden Fälle tritt garantiert ein!

26

Der Additionssatz

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

gilt allgemein (auch für nicht disjunkte Ereignisse A und B)



$P(A) + P(B)$: der Schnitt wird zwei Mal gezählt, muss daher einmal wieder subtrahiert werden.

Beispiel, Würfel: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

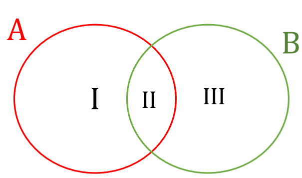
$\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$ stimmt!

www.matstat.org

27

Der Additionssatz

Herleitung mit Hilfe der Axiome:



Ereignisse I, II, III sind disjunkt
I = linker Halbmond
III = rechter Halbmond
II = mittlere Region

$P(A \cup B) = P(I) + P(II) + P(III)$ Axiom 3

$= \underbrace{P(I) + P(II)} + \underbrace{P(III) + P(II)} - P(II)$ ("Nulladdition")

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ q. e. d.

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ Boolesche Ungleichung, weil $P(A \cap B) \geq 0$

www.matstat.org

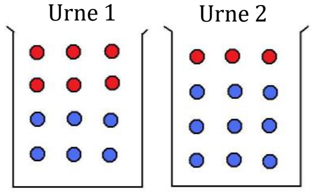
28

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Berechne die W. für ein Ereignis B wenn bekannt ist, dass Ereignis A schon vorliegt.
Symbol: $\boldsymbol{P(B|A)}$ "Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A"

Beispiel : ziehe zwei Kugeln aus zwei Urnen

Urne 1 Urne 2



Urne 1: 6 rote Kugeln von insgesamt 12
Urne 2: 3 rote Kugeln von insgesamt 12

Schritt 1: wähle zufällig eine Urne (Zufallsvariable U, mit $\Omega_U = \{1, 2\}$
Schritt 2: wähle zufällig eine Kugel aus dieser Urne (Zufallsvariable F = Farbe dieser Kugel, mit $\Omega_F = \{rot, blau\}$

$P(F = rot \mid U = 1) = \frac{6}{12}$ W., dass in Schritt 2 eine rote Kugel gezogen wird, unter der Bedingung dass in Schritt 1 Urne 1 gewählt wurde.

$P(F = rot \mid U = 2) = \frac{3}{12}$ W., dass in Schritt 2 eine rote Kugel gezogen wird, unter der Bedingung dass in Schritt 1 Urne 2 gewählt wurde.

29

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel : Kartenspiel: 52 Karten, 4 Asse (Poker).
Ziehe nacheinander 2 Karten

- Ereignis **A**: ziehe ein Ass in der 1. Ziehung
- Ereignis **B**: ziehe ein Ass in der 2. Ziehung

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{4}{52}$$

$P(B|A) = \frac{g}{m} = \frac{3}{51}$ 2. Ziehung: 51 Karten übrig, davon 3 Asse (A ist ja eingetroffen, d.h. ein Ass ist weg)

$P(B|A^*) = \frac{g}{m} = \frac{4}{51}$ 2:a Ziehung: 51 Karten übrig, davon 4 Asse (A ist nicht eingetroffen, d.h. alle 4 Asse noch drin)

$P(B) = ?$ totale Wahrscheinlichkeit, siehe unten (Wahrscheinlichkeit, in der 2. Ziehung ein Ass zu ziehen)

30

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel : zwei Würfel

- Zufallsvariable **X** : Augenzahl für Würfel 1
- Zufallsvariable **Y** : Augenzahl für Würfel 2

$$P(X + Y = 10 \mid X = 5) = \frac{1}{6}$$

(Y **muss** 5 werden, wenn die Summe 10 werden soll, d.h. es gibt nur ein günstiges Elementar-ereignis von 6 möglichen für den 2. Würfel)

$$P(X + Y = 10) = \frac{3}{6}$$

drei günstige Elementarereignisse: (5, 5) ; (4, 6) ; (6, 4)

$$P(X + Y = 10 \mid X = 1) = 0$$

(wenn $X = 1$ ist kann die Summe nicht mehr 10 werden)

uwe.menzel@.matstat.org

31

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

Beispiel : Würfel

- Ereignis B : gerade Augenzahl
- Ereignis A : Augenzahl wird zwei

$$\left.\begin{array}{l} B = \{2, 4, 6\} \\ \mathrm{A} = \{2\} \end{array}\right\} \quad A \cap B = \{2\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/_6}{1/_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

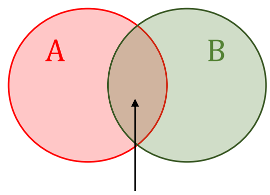
Wenn bereits bekannt ist, dass eine gerade Augenzahl gewürfelt wurde, so beträgt die W. dass die Augenzahl zwei war genau 1/3

www.matstat.org

32

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Intuitive Erklärung



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wenn bereits bekannt ist, dass B eingetroffen ist, reduziert sich der Ereugnisraum auf die das Ereignis B symbolisierende Fläche (grün). Die Wahrscheinlichkeit, dass unter diesen Umständen Ereignis A eintrifft, ist der Quotient $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, d.h das Verhältnins der mittleren Flächen zum Kreis, der B symbolisiert. Dieser Quotient ist also gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$.

www.matstat.org

33

Bedingte Wahrscheinlichkeit

<u>Beispiel</u> : zwei Würfel

- Zufallsvariable **X** : Augenzahl für Würfel 1
- Zufallsvariable **Y** : Augenzahl für Würfel 2

Anmerkung: manchmal wird ein Komma für "∩" geschrieben!

$$P(X+Y=10 \mid X=5) = \frac{P(X+Y=10\,,\ X=5)}{P(X=5)} = \frac{P(X=5, Y=5)}{P(X=5)} = \frac{{}^{1}\!/_{36}}{{}^{1}\!/_{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

... dasselbe Ergebnis wie oben

uwe.menzel@matstat.org

34

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

Nach Umformung:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Wenn A **und** B eintreffen sollen (Schnitt), muss erst B eintreffen, dann muss A eintreffen unter der Bedingung, dass B schon eingetroffen ist.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

... oder anders herum

<u>Beispiel</u> : Kartenspiel: 52 Karten, 4 Asse

- Ereignis **A**: ziehe ein Ass in der ersten Ziehung
- Ereignis **B**: ziehe ein Ass in der zweiten Ziehung

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \underline{\underline{0.0045}}$$

www.matstat.org

35

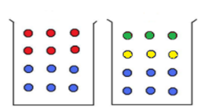
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für bedingte W. gelten die gleichen Sätze wie für alle Wahrscheinlichkeiten:

$P(A^*) + P(A) = 1$ Komplementsatz

$P(A^* | \, S) + P(A | \, S) \; = 1$ Komplementsatz für bedingte W. ("durchkonditioniert nach S")

<u>Beispiel</u> : zwei Urnen



Schritt 1: wähle zufällig eine Urne $\Omega_U = \{1, 2\}$
Schritt 2: wähle zufällig eine Kugel aus dieser Urne $\Omega_F = \{rot, blau, grün, gelb\}$

Wenn bereits bekannt ist, dass in Schritt 1 Urne 1 gewählt wurde, so muss in Schritt 2 entweder die Farbe rot oder blau gewählt werden:

$$P(\underbrace{blau}_{A^*} \,|\, \underbrace{U = 1}_{S}) + P(\underbrace{rot}_{A} \,|\, \underbrace{U = 1}_{S}) = 1$$

www.matstat.org

36

Unabhängige Ereignisse

Ereignisse A, B

$\boxed{P(B \mid A) = P(B)}$ wenn dies gilt, werden A und B unabhängig genannt

Beispiel : $P(L \mid R) = P(L)$

L: gewinne im Lotto R: es regnet in Berlin

Beispiel : zwei Würfel

- Zufallsvariable X : Augenzahl für Würfel 1
- Zufallsvariable Y : Augenzahl für Würfel 2

$$P(Y = 2 \mid X = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \text{X, Y sind unabhängig}$$

www.matstat.org

37

Unabhängige Ereignisse

Wenn Ereignisse A und B unabhängig sind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ wenn A, B unabhängig (sehr oft verwendet!)

gilt auch für mehr als 2 Ereignisse:

$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$ wenn A, B, C paarweise unabhängig

Beispiel : zwei Würfel

- Zufallsvariable **X** : Augenzahl für Würfel 1
- Zufallsvariable **Y** : Augenzahl für Würfel 2

$$P(X = 1, Y = 5) = P(X = 1) \cdot P(Y = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

weil unabhängig

www.matstat.org

38

Unabhängige Ereignisse

Unabhängigkeit zwischen Ereignissen führt zu einer Anzahl von Folgesätzen:

$P(B \mid A) = P(B)$ $\Rightarrow$ $P(A \mid B) = P(A)$ Beweis mit Hilfe der Def. für bedingte W.)

$\Rightarrow$ $P(A^* \mid B) = P(A^*)$ A^* unabhängig von B

$\Rightarrow$ $P(B^* \mid A) = P(B^*)$ B^* unabhängig von A

$\Rightarrow$ $P(A^* \mid B^*) = P(A^*)$ komplementäre Ereignisse auch unabhängig wenn A, B unabhängig

Vorsicht vor Verwechslung von unvereinbaren (disjunkten) und unabhängigen Ereignissen:

	Schnitt	Bedingte W.
unvereinbar	$P(A \cap B) = 0$	$P(A\|B) = 0$
unabhängig	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A\|B) = P(A)$

passt nicht zusammen passt nicht zusammen

39

Unabhängige Ereignisse

Beispiel : Würfel

$A = \{1, 3, 5\}$ ungerade Zahl $P(A) = {}^1/_2$

$B = \{4, 5, 6\}$ mindestens 4 $P(B) = {}^1/_2$

$C = \{3, 6\}$ teilbar mit 3 $P(C) = {}^1/_3$

a) Sind A und B unabhängig ?

$A \cap B = \{5\}$ $P(A \cap B) = {}^1/_6 \neq P(A) \cdot P(B)$ $\rightarrow$ anhängig !

b) Sind A und C unabhängig ?

$A \cap C = \{3\}$ $P(A \cap C) = {}^1/_6 = P(A) \cdot P(C)$ $\rightarrow$ unabhängig !

uwe.menzel@matstat.org

40

Unabhängige Ereignisse

Beispiel: drei elektronische Komponenten K_A, K_B, K_C

- Ereignis A: K_A fällt aus $P(A) = 0.2$
- Ereignis B: K_B fällt aus $P(B) = 0.05$
- Ereignis A: K_C fällt aus $P(C) = 0.1$

innerhalb des 1. Jahres

Wir nehmen an, dass die Ereignisse A, B und C paarweise unabhängig sind.

a) W. dass alle 3 Komponenten im 1. Jahr ausfallen?

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.2 \cdot 0.05 \cdot 0.1 = \underline{\underline{0.001}}$$

b) W. dass K_A und K_B ausfallen, nicht jedoch K_C ?

$$P(A \cap B \cap C^*) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C^*) = P(A) \cdot P(B) \cdot [1 - P(C)] = 0.2 \cdot 0.05 \cdot 0.9$$

uwe.menzel@matstat.org

41

Unabhängige Ereignisse

c) W. dass genau zwei Komponenten (im 1. Jahr) ausfallen ?

$$P(genau\ 2) = P[(A \cap B \cap C^*) \underset{\text{"oder"}}{\cup} (A \cap B^* \cap C) \underset{\text{"oder"}}{\cup} (A^* \cap B \cap C)]$$

Die durch ∪ ("oder") verbundenen Ereignisse sind disjunkt!

$$= P(A \cap B \cap C^*) + P(A \cap B^* \cap C) + P(A^* \cap B \cap C)$$ Axiom 3

$$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C^*) + P(A) \cdot P(B^*) \cdot P(C) + P(A^*) \cdot P(B) \cdot P(C)$$ Unabhängigkeit

$$= 0.2 \cdot 0.05 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.95 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.05 \cdot 0.1 = \cdots$$

d) W. dass mindestens zwei Komponenten ausfallen ?

$$P(mind.\,2) = \underset{\text{Aufg. a)}}{P(alle\ drei)} + \underset{\text{Aufg. c)}}{P(genau\ 2)}$$

"+" wegen "oder"

e) W. dass alle Komponenten das 1. Jahr durchhalten ?

$$P(kein\ Ausfall) = P(A^* \cap B^* \cap C^*) = P(A^*) \cdot P(B^*) \cdot P(C^*) = 0.8 \cdot 0.95 \cdot 0.9$$

uwe.menzel@matstat.org

42

Wahrscheinlichkeit dass "mindestens ein" Ereignis eintrifft

$\boxed{P(\text{"}mind.eins\text{"}) = 1 - P(\text{"}keines\text{"})}$ folgt aus Komplementsatz

$P(S) = 1 - P(S^*)$ Komplementsatz

Sei $S = A \cup B \cup C$ A oder B oder C → "mind. eins" (kein exklusives "oder"!)

$S^* = (A \cup B \cup C)^* = A^* \cap B^* \cap C^*$ (de Morgan) nicht A, nicht B, nicht C → "keines"

$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^* \cap B^* \cap C^*)$ $P(\text{"}minsd.eins\text{"}) = 1 - P(\text{"}keines\text{"})$

Siehe Beispiel "drei elektronische Komponenten" oben: W. dass "mind. eine" Komponente ausfällt:

$P(\text{"}keine\text{"}) = P(A^*) \cdot P(B^*) \cdot P(C^*) = 0.8 \cdot 0.95 \cdot 0.9 = \underline{\underline{0.684}}$

$P(\text{"}mind.eine\text{"}) = 1 - 0.684 = \underline{\underline{0.316}}$

www.matstat.org

43

Wahrscheinlichkeit dass "mindestens ein" Ereignis eintrifft

Verallgemeinerung: n unabhängige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$P(A_1) = p_1$
$P(A_2) = p_2$
...
$P(A_n) = p_n$

Ereignis **M** : mindestens eines der Ereignisse trifft ein
Ereignis **M***: keines der Ereignisse trifft ein

$$P(M) = 1 - P(M^*)$$

$$P(M) = 1 - \underbrace{(1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot \ldots \cdot (1-p_n)}_{\text{W., dass keines der Ereignisse eintrifft}}$$

Wenn alle p_i gleich sind, d.h. $p_i = p$ für alle i, folgt:

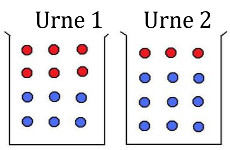
$$\boxed{P(M) = 1 - (1-p)^n}$$

www.matstat.org

44

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Beispiel : zwei Urnen, siehe oben



Urne 1: 6 rote von insgesamt 12 Kugeln
Urne 2: 3 rote von insgesamt 12 Kugeln
Schritt 1: wähle eine Urne $\Omega_U = \{1, 2\}$
Schritt 2: wähle eine Kugel aus dieser Urne $\Omega_F = \{rot, blau\}$

Aufgabe: $P(rot) = ??$

$$\left.\begin{aligned} P(rot \mid U_1) &= {}^6/_{12} \\ P(rot \mid U_2) &= {}^3/_{12} \end{aligned}\right\}$$ bedingte Wahrscheinlichkeiten → wichte diese mit den W. dass Urne 1 oder 2 ausgewählt wurden

$$P(rot) = P(rot \mid U_1) \cdot P(U_1) + P(rot \mid U_2) \cdot P(U_2)$$ gewichteter Mittelwert

Gewichte, addieren sich zu 1, z. B. $P(U_1) = 0.5 \;\; P(U_2) = 0.5$

$$P(rot) = \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

in diesem speziellen Fall sind $P(U_1) = P(U_2) = 0.5$, so dass der gewichtete Mittelwert gleich dem arithmetischen Mittelwert ist.

www.matstat.org

45

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Das Gesetz kann auf folgende Weise "hergeleitet" werden:

$$P(rot) = P[\; (U_1 \cap rot) \cup (U_2 \cap rot) \;]$$

"und" "oder" "und"

$(U_1 \cap rot)$ und $(U_2 \cap rot)$ sind disjunkt

$$= P(U_1 \cap rot) + P(U_2 \cap rot)$$

wegen Axiom 3 ("oder" → "+", denn die eingeklammerten Ereignisse sind disjunkt)

mit der Definition für die bedingte W.: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
können wir dann schreiben:

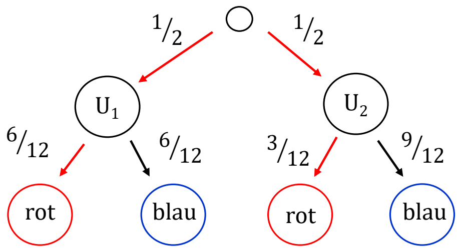
$$P(rot) = P(rot \mid U_1) \cdot P(U_1) + P(rot \mid U_2) \cdot P(U_2)$$ wie oben

uwe.menzel@matstat.org

46

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Baumdiagramm für das Urnen-Beispiel :



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \qquad \frac{6}{12}+\frac{6}{12}=1 \qquad \frac{3}{12}+\frac{9}{12}=1$$

die Summe aller von einem Knoten ausgehenden W. muss 1 sein!

$$P(rot) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{12}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{12}}=\frac{3}{8}$$

zwei Wege die schließlich zu einer roten Kugel führen (rot eingezeichnet)

uwe.menzel@matstat.org

47

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

... gilt auch für mehr als 2 mögliche Wege:

Beispiel : drei Urnen 

$$P(rot) = P(rot \mid U_1)\cdot P(U_1) + P(rot \mid U_2)\cdot P(U_2) + P(rot \mid U_3)\cdot P(U_3)$$

Das Ereignis "rot" kann auf 3 Wegen realisiert werden.

$P(U_1) + P(U_2) + P(U_3) = 1$ Summe der Gewichte muss 1 sein

Verallgemeinerung:, n Urnen (oder was auch immer es sein möge ...):

$$\boxed{P(R) = \sum_{i=1}^{n} P(R \mid U_i)\cdot P(U_i)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

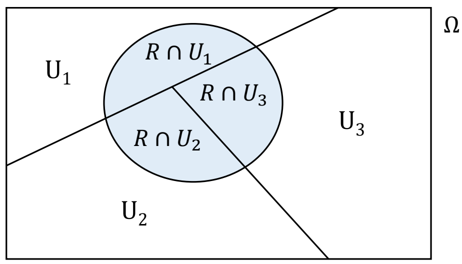
- die U_i müssen paarweise disjunkt sein: $U_i \cap U_j = \emptyset$
- die U_i müssen den Ereignisraum vollständig ausfüllen: $\sum P(U_i) = 1$

www.matstat.org

48

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

- die U_i müssen disjunkt (unvereinbar) sein: $U_i \cap U_j = \emptyset$
- die U_i müssen den Ereignisraum ausfüllen: $\sum P(U_i) = 1$



Die Ereignisse U_1, U_2, U_3 decken den Ereignisraum Ω vollständig ab, sie sind außerdem unvereinbar

$$P(R) = P[(R \cap U_1) \cup P(R \cap U_2) \cup P(R \cap U_3)] \quad \cup \rightarrow + \text{ (disjunkt)}$$

$$P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(R \cap U_3)$$

$$= P(R \mid U_1) \cdot P(U_1) + P(R \mid U_2) \cdot P(U_2) + P(R \mid U_3) \cdot P(U_3)$$

zweite Zeile durch Anwendung der Definition für die bedingte W.:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

49

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Produktion mit mehreren Maschinen

Eine Fabrik stellt ein Produkt auf mehreren Maschinen her:

- auf Maschine 1 (**M_1**) werden 25% aller Produkte hergestellt, 5% davon defekt
- auf Maschine 2 (**M_2**) werden 35% aller Produkte hergestellt , 4% davon defekt
- auf Maschine 3 (**M_3**) werden 40% aller Produkte hergestellt, 2% davon defekt

Alle Produkte werden in dem gleichen Container gesammelt.
Zufallsversuch: ein Produkt wird zufällig aus dem Container ausgewählt.
Gesucht: W. dass das gewählte Produkt defekt ist.

$$\left.\begin{array}{l} P(defekt \mid M_1) = 0.05 \\ P(defekt \mid M_2) = 0.04 \\ P(defekt \mid M_3) = 0.02 \end{array}\right\}$$

bedingte Wahrscheinlichkeiten, diese müssen mit den entsprechenden Anteilen $P(M_i)$ gewichtet werden

$$P(defekt) = P(defekt \mid M_1) \cdot P(M_1) + P(defekt \mid M_2) \cdot P(M_2) + P(defekt \mid M_3) \cdot P(M_3)$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\left.\begin{array}{l} P(M_1) = 0.25 \\ P(M_2) = 0.35 \\ P(M_3) = 0.40 \end{array}\right\} \text{ "Gewichte" } \quad \sum_i P(M_i) = 1$$

$$P(defekt) = 0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.35 + 0.02 \cdot 0.4 = \underline{\underline{0.0345}}$$

50

Beispiel: Diagnostischer Test auf eine Krankheit

- Ereignis **S** : eine zufällig ausgewählte Person hat diese Krankheit
- Ereignis **S*** : eine zufällig ausgewählte Person hat diese Krankheit nicht
- $\boldsymbol{P}(+)$: W., dass eine zufällig ausgewählte Person positiv getestet wird
- $\boldsymbol{P}(-)$: W., dass eine zufällig ausgewählte Person negativ getestet wird
- $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{p}$: Anteil erkrankter Personen in der Bevölkerung (für diese Krankheit)

Die Sensitivität und die Spezifizität für den Test seien bekannt:

- $P(+ \mid S) = 0.9999$; Sensitivität = W. für positiven Test wenn die Person krank ist
- $P(- \mid S^*) = 0.995$; Spezifizität = W. für negativen Test wenn die Person **nicht** krank ist

Beide Werte sollten nahe bei Eins sein, wenn der Test gut ist !

Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test:

$$P(+) = P(+ \mid S) \cdot P(S) + P(+ \mid S^*) \cdot P(S^*) \quad \text{totale Wahrscheinlichkeit}$$

$$= P(+ \mid S) \cdot p + [1 - P(- \mid S^*)] \cdot (1 - p) \quad \text{wegen Komplementsatz}$$

a) Suche W. dass eine zufällig ausgewählte Person positiv getestet wird wenn $\boldsymbol{p} = \mathbf{0.2}$

$P(+) = 0.9999 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = \mathbf{0.204}$ (etwas höher als der wirkliche Anteil kranker)

b) Suche W. dass eine zufällig ausgewählte Person positiv getestet wird wenn $\boldsymbol{p} = \mathbf{0.001}$

$P(+) = 0.9999 \cdot 0.001 + 0.005 \cdot 0.999 = \mathbf{0.006}$

- 6 mal so hoch als der tatsächliche Anteil kranker → viele "falsch positive" wenn die Krankheit selten ist!

51

Satz von Bayes

Ein ganzes Teilgebiet der Statistik: "Bayesian statistics"

Thomas Bayes

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}} \quad \text{Satz von Bayes}$$

"Umdrehen" von bedingten Wahrscheinlichkeiten : von $P(A \mid B) \rightarrow$ zu $P(B \mid A)$

www.matstat.org

52

Satz von Bayes

Beispiel : Produktion mit mehreren Maschinen (siehe oben)

Aufgabe: Ein Kunde bekommt eine defekte Komponente (aus dem Container).
Wie groß ist die W., dass diese von Maschine 1 kommt ?

dieses Ereignis (defekt) ist nun eingetreten

bekannt

bekannt

$$P(M_1 \mid defekt) = \frac{P(defekt \mid M_1) \cdot P(M_1)}{P(defekt)}$$ Satz von Bayes

totale W.

$$P(M_1 \mid defekt) = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.0345} = 0.36 = \underline{\underline{36\%}}$$

uwe.menzel@matstat.org

Satz von Bayes

Beispiel : diagnostischer Test (siehe oben)

Eine Person wurde positiv getestet (Ereignis ist eingetreten). Wie groß ist die W., dass diese Person wirklich krank ist, wenn man annimmt dass 0.1% der Bevölkerung die Krankheit haben (also $\boldsymbol{p = 0.001}$)

Wir suchen also $\boldsymbol{P(S \mid +)}$: W. dass die Krankheit vorliegt wenn der Test positiv war !

bekannt

bekannt

$$P(S \mid +) = \frac{P(+ \mid S) \cdot P(S)}{P(+)}$$ Satz von Bayes

totale W.

$$P(S \mid +) = \frac{0.9999 \cdot 0.001}{0.006} = 0.167 \approx \underline{\underline{17\%}}$$

Achtung! Nur 17% der positiv getesteten Personen sind wirklich krank ! (viele falsch positive Ergebnisse bei seltenen Krankheiten!)

Satz von Bayes

<u>Beispiel</u> : Alkohol im Straßenverkehr (die Zahlen in diesem Beispiel sind erfunden, aber vielleicht nicht ganz unrealistisch ...)

”20% aller Verkehrsunfälle geschehen im Zusammenhang mit Alkohol”
Ist diese Information sinnvoll? – Kaum ! (80% aller Verkehrsunfälle geschehen ganz ohne Alkohol ! ...?)

$P(Alk \mid Unfall) = 20\%$ nur tätsächlich stattgefundene Unfälle werden einberechnet – **falsch**!

<u>Lieber vergleichen</u>: $P(Unfall \mid Alk) \rightleftarrows P(Unfall \mid Alk^*)$

geraten!

$$P(Unfall \mid Alk) = \frac{P(Alk \mid Unfall) \cdot P(Unfall)}{P(Alk)} = \frac{0.2 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0.2 \cdot 0.1 = 2\%$$

$$P(Unfall \mid Alk^*) = \frac{P(Alk^* \mid Unfall) \cdot P(Unfall)}{P(Alk^*)} = \frac{0.8 \cdot 10^{-4}}{1 - 10^{-3}} \approx 0.8 \cdot 10^{-4} = 0.008\%$$

”Alk*” bedeutet also ”kein Alkohol” (Komplement)

55

Satz von Bayes

<u>Beispiel</u>: Lungenkrebs und Rauchen

”90% aller Lungenkrebspatienten sind Raucher”

<u>Lieber vergleichen:</u> $P(Krebs \mid Raucher) \rightleftarrows P(Krebs \mid Raucher^*)$

$Raucher^* =$ Nichtraucher

Berechnung wie im Beispiel ”Alkohol im Straßenverkehr ”

56

Zusammenfassung

Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition: $P(A) = \frac{g}{m}$

Axiome Kolmogorows (3 Stück)

Komplementsatz $P(A^*) = 1 - P(A)$

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

unabhängige Ereignisse $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ oder $P(B \mid A) = P(B)$

Satz der totalen W. $P(R) = \sum_i P(R \mid M_i) \cdot P(M_i)$ $\sum_i M_i = 1$ M_i disjunkt

Bayes' Satz $P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A)}$ "Umwenden" von bedingten W.

57