Methoden zur Lösung Gewöhnlicher Differentialgleichungen am Beispiel von Schwingungen

Uwe Menzel, 2000

uwe.menzel@matstat.de

www.matstat.org

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$x = x(t) \qquad \text{Auslenkung einer Feder, Ladung ...}$$

$$x' = \frac{dx}{dt} \qquad \text{Ableitungen nach der Zeit}$$

$$F(x'', x', x, t) = 0 \qquad \text{implizite Form}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\boxed{x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)}$$

- $a_i(t)$: Koeffizienten
- $f(t)$: Störfunktion
- $f(t) = 0$: homogene Gleichung

Lösbare Fälle

$$x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = f(t)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kann nicht angegeben werden. Jedoch sind Lösungen für eine Reihe von Spezialfällen bekannt:

- homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten
- inhomogene Gl. mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen
- bei fehlenden Termen, z.B:
  - $x'' = \phi(t)$
  - $x'' = \phi(x)$
  - $x'' = \phi(x')$

Spezielle lösbare Differentialgleichungen

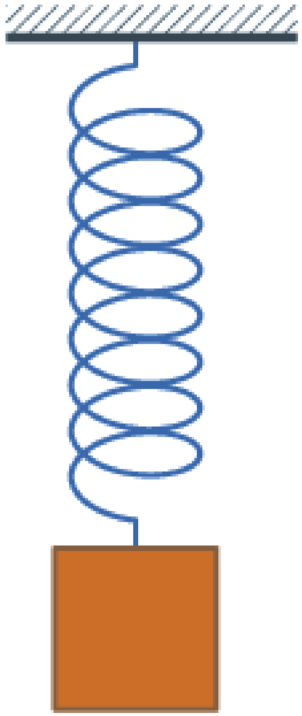
Eulersche, Besselsche und Gaussche Dgl.:

$$at^2x'' + btx' + cx = 0$$

$$t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0$$

$$t(t-1)x'' + [(\alpha + \beta + 1)t - \gamma]x' + \alpha\beta\gamma = 0$$

Federschwinger



Auslenkung aus
der Ruhelage: $x(t)$

Quelle: Wikipedia

Ungedämpfter harmonischer Oszillator

Rückstellkraft $F = -k \cdot x$
Newtonsches Gesetz $F = m \cdot a$

$$mx'' + kx = 0$$

Ansatz: $x = e^{\lambda t}$ λ noch unbekannt

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ charakteristische Gleichung

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$$

Zwei linear unabhängige Lösungen: $\underline{e^{i\omega_0 t} \text{ und } e^{-i\omega_0 t}}$

Superpositionsprinzip

Zwei linear unabhängige Lösungen: $e^{i\omega_0 t}$ und $e^{-i\omega_0 t}$

Alle Linearkombinationen dieser Lösungen bilden die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\boxed{x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + C_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}}$$

Fundamentalsystem

$$\boxed{x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega_0 t} + C_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}}$$

$$e^{i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i \cdot \sin\omega_0 t \qquad \text{Eulersche Gleichung}$$

$$\boxed{x(t) = A_1 \cdot \sin\omega_0 t + A_2 \cdot \cos\omega_0 t}$$

$$\sin(\omega_0 t + \phi) = \sin\omega_0 t \cdot \cos\phi + \cos\omega_0 t \cdot \sin\phi$$

$$\boxed{x(t) = B \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)}$$

Lineare Unabhängigkeit von 2 Funktionen $x_i(t)$:

Es lassen sich keine Konstanten C_1 und C_2 finden, so dass:

$$C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t) \equiv 0$$

Zwei Funktionen sind linear unabhängig, wenn sie nicht proportional sind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_2' \cdot x_1 - x_2 \cdot x_1'}{x_1^2} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

SATZ: Zwei Partikularlösungen x_1 und x_2 bilden genau dann ein Fundamentalsystem und ihre Linearkombination stellt das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$x'' + a_1(t) \cdot x' + a_0(t) \cdot x = 0$$

dar, wenn die aus ihnen gebildete Wronskische Determinante von Null verschieden ist.

Auf höhere Ordnungen erweiterbar:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} \neq 0$$

Anfangsbedingungen

Eine Differentialgleichung 2. Ordnung erfordert die Kenntnis von zwei Anfangswerten (oder Randwerten):

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cdot \sin \omega_0 t + A_2 \cdot \cos \omega_0 t \\ x'(t) &= A_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t - A_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= A_2 \\ v_0 &= A_1 \cdot \omega_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t)}$$

Phasenraumdarstellung

Wir können t eliminieren und v über x auftragen:

$$\begin{aligned} x(t) &= B\sin(\omega_0 t + \phi) \\ v(t) &= x'(t) = B\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

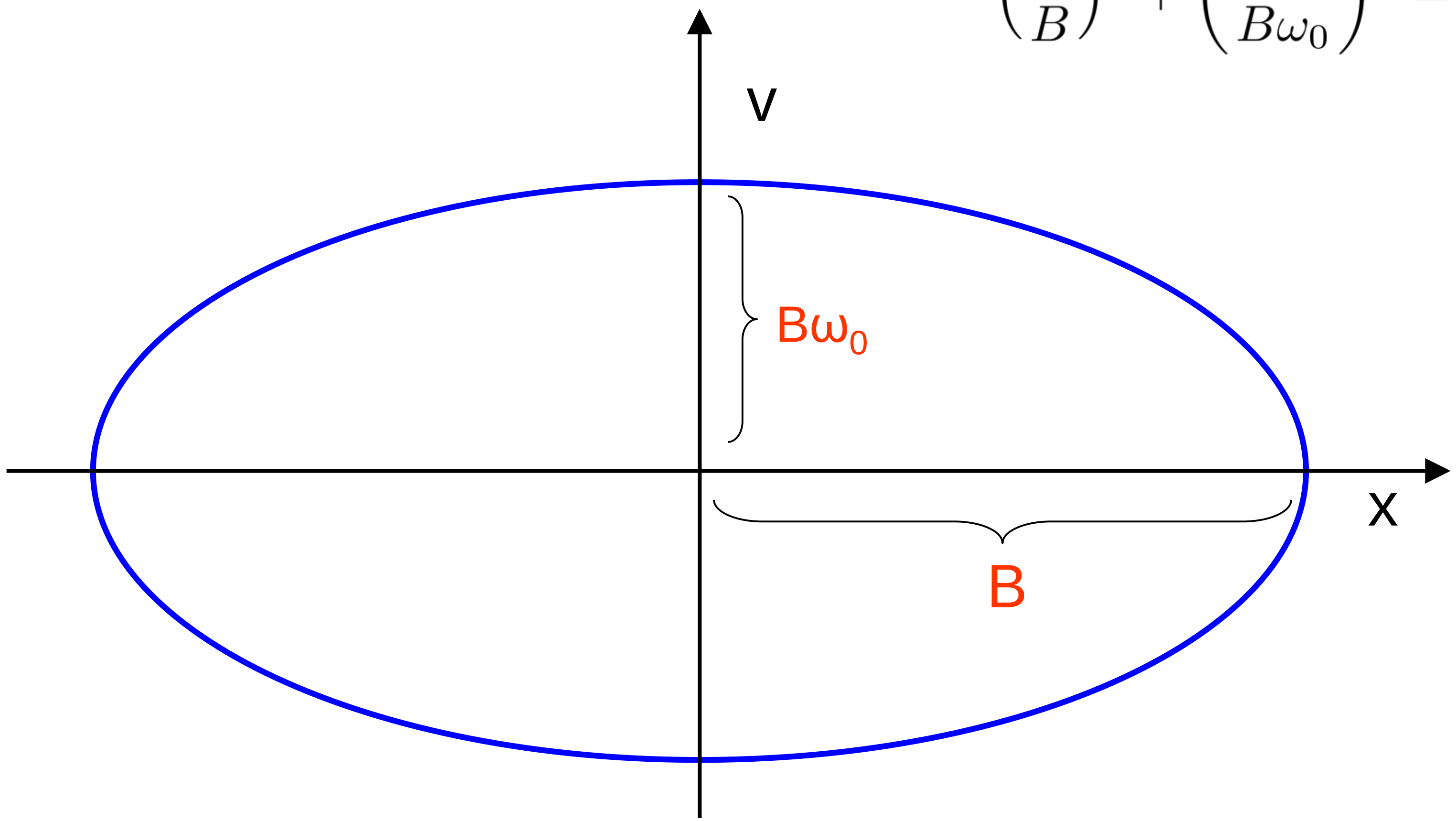
$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{B}\right)^2 &= \sin^2(\omega_0 t + \phi) \\ \left(\frac{v}{B\omega_0}\right)^2 &= \cos^2(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x}{B}\right)^2 + \left(\frac{v}{B\omega_0}\right)^2 = 1$$

Uwe Menzel, 2000

Phasenraumdarstellung für freie Schwingung

$$\left(\frac{x}{B}\right)^2 + \left(\frac{v}{B\omega_0}\right)^2 = 1$$



Uwe Menzel, 2000

Dämpfung

$$mx'' + 2rmx' + kx = 0$$

Reibungsterm ~ Geschwindigkeit; Reibungskoeffizient 2*r*

konstante Koeffizienten → **Ansatz:** $x(t) = e^{\lambda t}$

Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2r\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\boxed{\lambda_{1/2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}}$$

Gedämpfte Schwingung

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_{1/2} &= -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

a) $r > \omega_0$ (starke Dämpfung) $\rightarrow$ $\lambda_{1/2}$ reell und positiv

b) $r = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\begin{aligned} \lambda &= -r \\ x_1(t) &= e^{-rt} \quad \text{und} \quad x_2(t) = te^{-rt} \\ x(t) &= e^{-rt}(C_1 + C_2 t) \end{aligned}$$

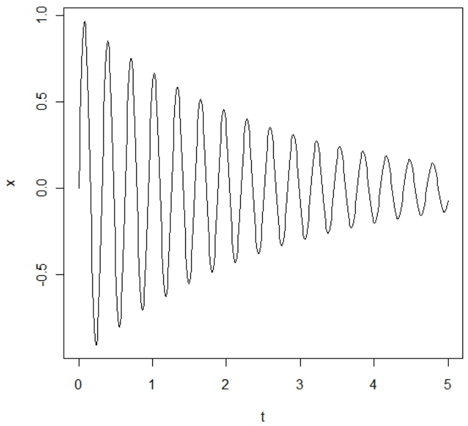
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-rt} & te^{-rt} \\ -re^{-rt} & (1-rt)e^{-rt} \end{vmatrix} = e^{-2rt} \neq 0$$

Gedämpfte Schwingung, Forts.

c) $r < \omega_0$ (schwache Dämpfung, Schwingfall)

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/2} &= -r \pm i\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \\
x(t) &= C_1 \exp\left[-rt + i\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t\right] + C_2 \exp\left[-rt - i\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t\right] \\
x(t) &= Be^{-rt} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi\right)
\end{aligned}$$

Kleinere Frequenz, Amplitude nimmt exponentiell ab:



Isoklinenmethode

$$\begin{aligned} x(t) &= B \cdot e^{-rt} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi\right) \\ v(t) &= -B \cdot r \cdot e^{-rt} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi\right) \\ &\quad + B \cdot e^{-rt} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi\right) \end{aligned}$$

Manchmal kann man t nicht einfach aus der Lösung eliminieren, um die Phasenraumdarstellung zu erhalten.

$$mx'' + 2rmx' + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$m\frac{dv}{dx}v + 2mrv + kx = 0$$

Isoklinenmethode, Forts.

$$m\frac{dv}{dx}v + 2mrv + kx = 0$$

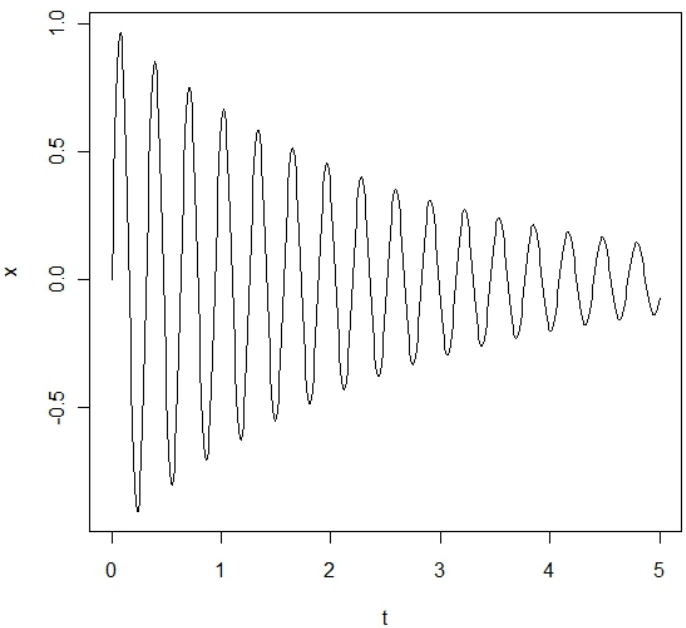
Isoklinen sind diejenigen Kurven, auf denen $\frac{dv}{dx}$ jeweils gleiche Werte hat.

$$\frac{dv}{dx} = -\left(2r + \frac{k}{m} \cdot \frac{x}{v}\right)$$

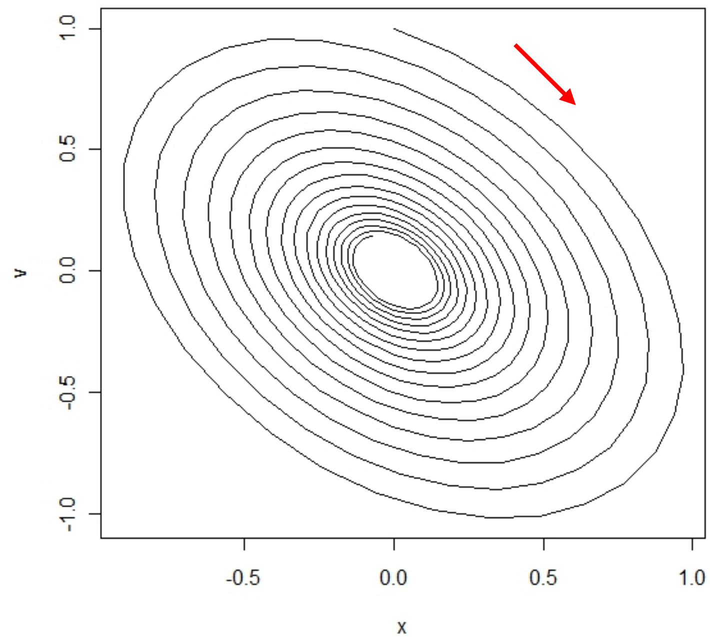
$$\tan\phi = -\left(2r + \frac{k}{m} \cdot \frac{x}{v}\right)$$

$$v = -\frac{k}{m} \cdot \frac{x}{\tan\phi + 2r}$$

Gedämpfte Schwingung



$x(t)$



Phasenraum $v(x)$

Source code: damped_oscillator.R

Uwe Menzel, 2000

Inhomogene Gleichung

$$x'' + 2rx' + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega t)$$

SATZ: Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung und irgendeiner partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

$$x_{inh} = x_{hom} + x_{par}$$

Ansatz für partikuläre Lösung: $x_{par}(t) = D \cdot \sin(\Omega t + \alpha)$

Inhomogene Gleichung, Forts.

$$\boxed{\begin{aligned} &x'' + 2rx' + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega t) \\ &x_{par}(t) = D \cdot \sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned}}$$

$$Term_1 \cdot \sin(\Omega t) + Term_2 \cdot \cos(\Omega t) = 0$$

$$Term_1 = \omega_0^2 D \cos\alpha - 2r\Omega D \sin\alpha - \Omega^2 D \cos\alpha - f_0 = 0$$

$$Term_2 = \omega_0^2 D \sin\alpha + 2r\Omega D \cos\alpha - \Omega^2 D \sin\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{2r\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \qquad D = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4r^2\Omega^2}}$$

$$\boxed{x(t) = Be^{-rt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - r^2} \cdot t + \phi) + D \sin(\Omega t + \alpha)}$$

Inhomogene Gleichung, Forts.

$$x(t) = \underbrace{Be^{-rt}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}\cdot t + \phi\right)} + \underbrace{D\sin\left(\Omega t + \alpha\right)}$$

Gedämpfte Schwingung:
expon. fallende Ampl.
verminderte Frequenz

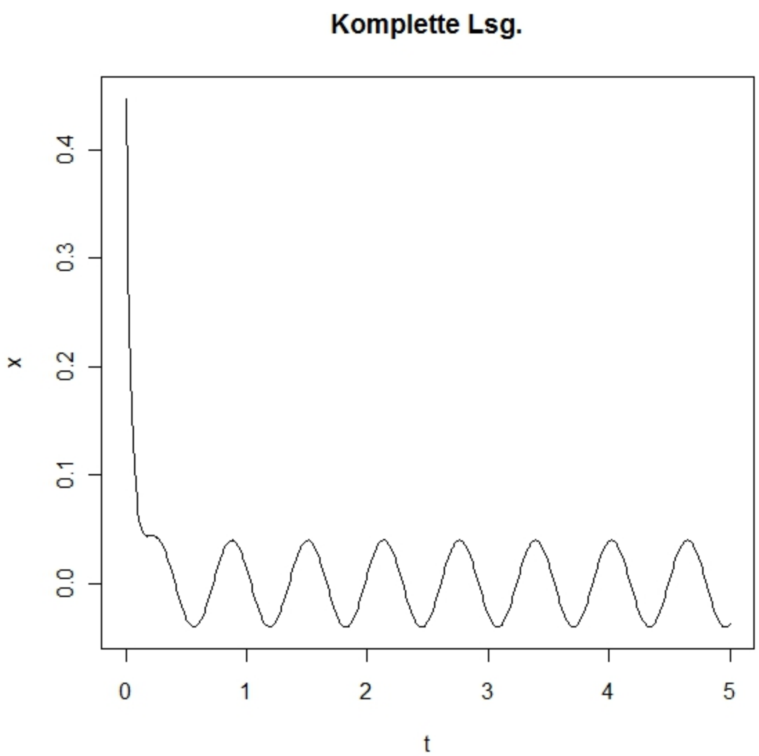
Forcierte Schwingung:
$D \sim F_0$
dieselbe Frequenz wie F_0

$$v(t) = x'(t) = \ldots$$

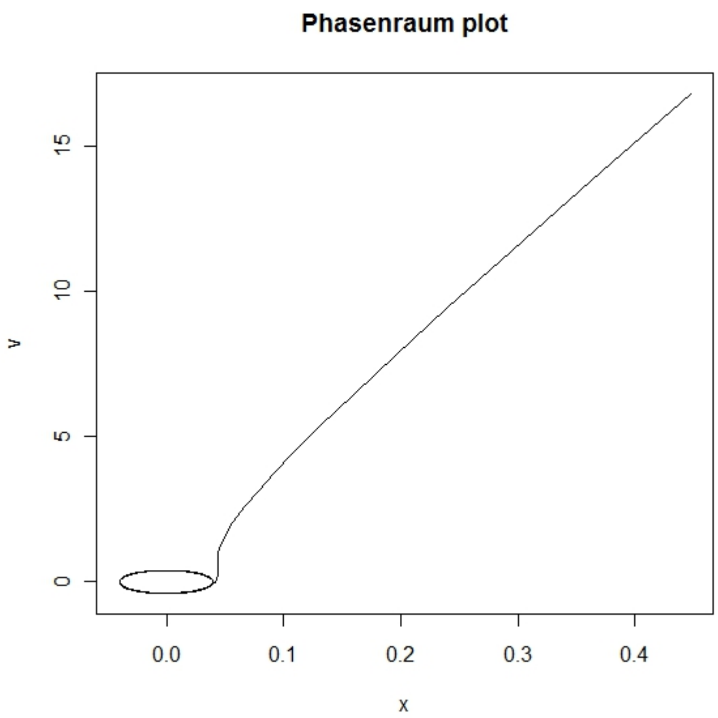
x und v für einige Hundert t-Werte ausrechnen, dann v über x auftragen, um Phasenraumdarstellung zu bekommen.

Source code: forced_oscillator.R

Erzwungene Schwingung (Grenzzyklus)



$x(t)$



Phasenraum $v(x)$

Source code: forced_oscillator.R

Uwe Menzel, 2000

Ansätze für spezielle rechte Seiten

Inhomogenität	Ansatz
$a\cos\omega t + b\sin\omega t$	$A\cos\omega t + B\sin\omega t$
$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$
ae^{kt}	Ae^{kt}
Linearkombination obiger Funktionen	Linearkombination obiger Ansätze

Resonanzfall

Störfunktion oder einer ihrer Terme ist gleichzeitig Lösung der homogenen Gleichung:

$$x'' + x' - 2x = \cosh t$$

$$x_{hom} = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

aber: $\cosh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$

In diesem Falle versagt das Ansatzverfahren → **Variation der Konstanten**

Variation der Konstanten

$$x_{hom}(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t)$$

$$x_s(t) = C_1(t) \cdot x_1(t) + C_2(t) \cdot x_2(t)$$

(Ansatz für partikuläre Lösung)

einsetzen in: $$x'' + 2rx' + \omega_0^2 x = f_0(t)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} C_1' \cdot x_1 + C_2' \cdot x_2 &= 0 \\ C_1' \cdot x_1' + C_2' \cdot x_2' &= f(t) \end{aligned}$$

Beachte, dass x_1 und x_2 Lösungen der homogenen Gleichung sind

Variation der Konstanten, Forts.

$$\begin{aligned} C_1' \cdot x_1 + C_2' \cdot x_2 &= 0 \\ C_1' \cdot x_1' + C_2' \cdot x_2' &= f(t) \end{aligned}$$

Nach C_1' und C_2' auflösen! Dies ist immer möglich, denn

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

(Wronski – Determinante)

Nichtlineare Dynamik

Duffing-Gleichung

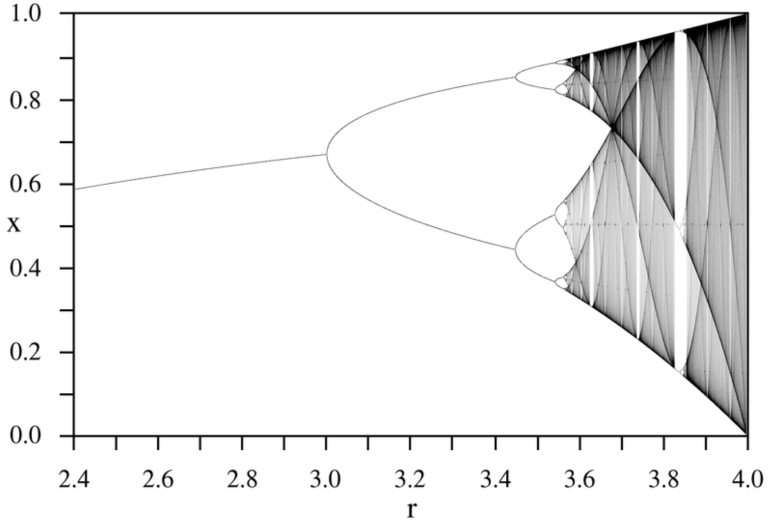
$$x'' + 2rx' + \omega_0^2 x + \underline{\beta x^3} = f_0 \cos(\Omega t)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f\quad(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f\quad(0)}{6} \cdot x^3 + \ldots$$

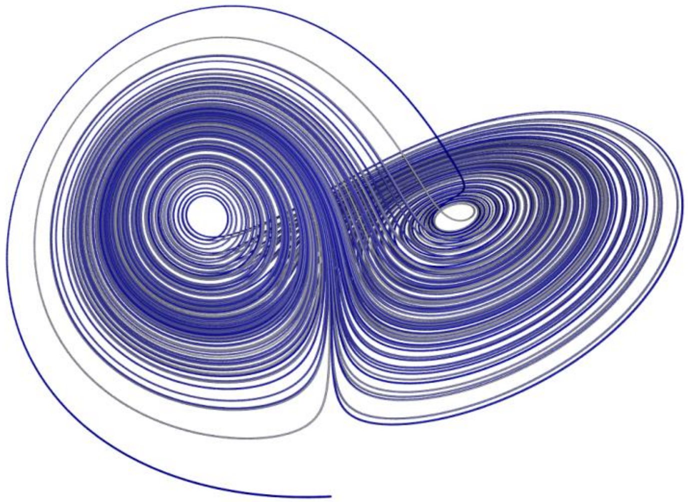
$$\begin{aligned} F(-x) &= -F(x) \\ U(-x) &= U(x) \end{aligned}$$

Numerische Lösung (Runge Kutta)

Nichtlineare Dynamik



Bifurkation



Lorentz-Attraktor

Uwe Menzel, 2000

Randwertprobleme (RWP)

- an mehreren Stellen werden Bedingungen an x oder x' gestellt
- oft sind dies die Ränder des Definitionsbereiches
- bei RWP existiert nicht immer eine eindeutige Lösung

$$x'' + x = 0$$

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$\boxed{x(0) = 0 \text{ und } x(1) = 0}$$

$$x'' + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

---

a) $x(0) = 0 \text{ und } x(1) = 0$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \cdot \cos 1 + C_2 \cdot \sin 1 = 0$$

$C_1 = C_2 = 0$ eindeutige Lösung

b) $x(0) = 0 \text{ und } x(\pi) = 0$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 = 0$$

$C_1 = 0$; C_2 beliebig unendlich viele Lösungen

c) $x(0) = 0 \text{ und } x(\pi) = 1$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 = 1$$

keine Lösung

Eigenwertgleichungen

$\frac{m}{2}x'^2 + U(x) = E$ Energiesatz

$p = m \cdot x'$ Impuls

$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E$

$p \to -i\hbar\frac{d}{dx}$ Impulsoperator

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right)\Psi(x) = E \cdot \Psi(x)$$

sei wieder $U(x) = -\frac{k}{2}x^2$ harmonischer Oszillator

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{k}{2}x^2\Psi = E\Psi$$

Eigenwertgleichungen, Forts.

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{k}{2}x^2\Psi = E\Psi}$$

führt auf Hermitesche Differentialgleichung, nur für bestimmte Werte von E lösbar (Eigenwerte):

$$\boxed{E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

diskrete Eigenwerte (Energiezustände), Quantelung

Nichtlineare Differentialgleichung

$mx'' = -kx$ lineare Rückstellkraft

$mx'' = F(x)$ nichtlineare Rückstellkraft, F ist eine nichtlineare Funktion der abhängigen Variablen

$mx''x' = F(x) \cdot x'$ (mit x' multiplizieren)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}{x'}^2\right) = -\frac{d}{dt}U(x)$$

denn $-\frac{d}{dt}U(x) = -\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = F(x) \cdot x'$

$\boxed{\frac{m}{2}{x'}^2 = E - U(x) \quad \text{Energiesatz}}$

Uwe Menzel, 2000

Nichtlineare Differentialgleichung, Forts.

$$\frac{m}{2}x'^2 = E - U(x)$$ Energiesatz

Trennung der Variablen:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$$

Zusammenfassung

- Lösung einer homogenen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- Ansatzverfahren für inhomogene Gleichungen 2. Ordnung
- Methode der Variation der Konstanten
- Wronski-Determinante, lineare Unabhängigkeit
- Phasenraumportraits, Isoklinenmethode
- Begriffe aus der nichtlinearen Dynamik
- Randwertprobleme
- Eigenwertprobleme